现代物理基础丛书 74

量子场论导论

——电磁作用的阿贝尔规范理论

姜志进　编著

科学出版社

现代物理基础丛书　74

量子场论导论

——电磁作用的阿贝尔规范理论

姜志进　编著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书较系统地介绍了电磁作用的阿贝尔规范理论的基本知识.全书共分六章,分别讨论自由粒子的相对论波动方程,包括自旋为0的标量粒子的克莱因-戈尔登方程,自旋为1/2的费米子的狄拉克方程及库仑与洛伦兹规范下光子的波动方程;建立起描述各自由粒子的拉格朗日场理论,给出不同场的能量、动量与自旋表达式;对各自由场实现正则量子化,克服标量粒子与光子的负能困难;讨论相互作用表象的特点,给出 S 矩阵与 S 矩阵元的表达式,导出旋量场电磁作用的费曼规则;在树图近似下计算出正负电子对湮灭为 μ 子对或强子的截面、康普顿散射截面及电子在库仑场中的散射截面;以单圈近似为例介绍旋量场电磁作用的重整化方法,得到重整化的质量与电荷,导出瓦德等式,给出一般相互作用理论的重整化判据.

书中数学推导过程较详细,易读易懂性较强.在内容安排上由浅入深、循序渐进.在理论结构方面前因后果、自成一体.本书适用于作为理论物理及相关专业研究生的教科用书,也适用于作为这类专业科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

量子场论导论:电磁作用的阿贝尔规范理论/姜志进编著.—北京:科学出版社,2015.11

(现代物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-046262-6

Ⅰ.①量… Ⅱ.①姜… Ⅲ.①量子场论 Ⅳ.①O413.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第265592号

责任编辑:钱 俊 裴 威/责任校对:邹慧卿

责任印制:张 倩/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年1月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2016年1月第一次印刷 印张:15 3/4

字数:318 000

定价:98.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

量子场论是20世纪20年代发展起来的一门描述微观粒子相互作用与转化规律的学科.它是现代物理学的基础,是理论物理及相关专业研究生的必修课.

量子场论(又名规范场论)所涵盖的内容非常丰富,按所采用的规范变换群,它大致可分为两部分:阿贝尔与非阿贝尔规范理论.前者采用的是阿贝尔规范变换群,后者是非阿贝尔规范变换群.如电磁作用,其规范变换群是阿贝尔$U(1)$群,因此电磁作用是一种阿贝尔规范理论,也就是习惯上所说的量子电动力学.而弱电统一规范理论与量子色动力学(二者统称为标准模型)分别采用$SU(2)\otimes U(1)$与$SU(3)$规范变换群,它们都是非阿贝尔群,因此弱电统一规范理论与量子色动力学都是非阿贝尔规范理论.在有限的授课时间内,本书将集中于电磁作用的阿贝尔规范理论,介绍该理论的基本知识,这也就是本书书名副标题(电磁作用的阿贝尔规范理论)的由来.

学过量子场论的人都知道:量子场论中的数学公式比较多,许多运算过程长且复杂,更有一些数学问题的处理,需要借助于一些特殊的技巧,这进一步增加了学好该课程的难度.鉴于此,本书的数学推导过程力求详细,使之易读易懂.以期即使是具有基本物理专业知识的一般初学者,阅读起来也不至于感到太困难,而能顺利、快速地理解并掌握量子场论的基本知识.这也是作者撰写本书的主要动因之一.

作为过渡,这里先作如下几点说明.

1.符号与度规

本书将用x表示粒子的时空坐标,它是一个有四个分量的四维矢量,$x^\mu(\mu=0,1,2,3)$是它的逆变分量,且取

$$x^0=t,x^1=x,x^2=y,x^3=z, \tag{0.1a}$$

或简写为

$$x^\mu=(t,\boldsymbol{x}). \tag{0.1b}$$

另外,本书将采用度规张量

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

即$g^{00}=g_{00}=1$,$g^{11}=g_{11}=g^{22}=g_{22}=g^{33}=g_{33}=-1$,若$\mu\neq\nu$,$g_{\mu\nu}=g^{\mu\nu}=0$,而$g^{\mu\mu}=g_{\nu\nu}=-2$[注:这里和后面都采用爱因斯坦求和规则,即两相同的角标表示求和].通

常称这种度规为 Bjorken - Drell 度规. 而四维时空矢量 x 的协变分量

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu , \tag{0.3a}$$

其各分量为

$$x_0 = t, x_1 = -x, x_2 = -y, x_3 = -z, \tag{0.3b}$$

或简写成

$$x_\mu = (t, -\boldsymbol{x}). \tag{0.3c}$$

当然,对于一个仅有三个或三个以下分量的矢量,其各分量的上、下指标就无须区分了. 四维时空矢量 x 的模方为

$$\begin{aligned} & x^2 = x^\mu x_\mu = g^{\mu\nu} x_\nu x_\mu = x^0 x_0 + x^i x_i = x_0 x_0 - x_i x_i = t^2 - \boldsymbol{x}^2 \\ & \Rightarrow \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = -x^i x_i = x_i x_i , \end{aligned} \tag{0.4}$$

若无特殊说明,这里和以后都采用希腊字母,如 μ、ν、α 等表示四维时空的指标,而用拉丁字母,如 i、j、k 等表示其他空间的指标.

由于

$$x_\mu = g_\mu^\nu x_\nu ,$$

所以

$$g_\mu^\nu = \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{0.5}$$

即混合度规张量 g_μ^ν 是一个单位张量, $g_0^0 = g_1^1 = g_2^2 = g_3^3 = 1$,若 $\mu \neq \nu$, $g_\mu^\nu = 0$,而 $g_\mu^\mu = 4$.

在有关参考书中,经常会遇到另一种度规——Pauli 度规,其度规张量就是一如上式所示的单位张量,这时四维时空矢量 x 的逆变与协变分量相同,都为 $x^\mu = x_\mu = (\boldsymbol{x}, \mathrm{i}t)$, 即 $x^1 = x_1 = x, x^2 = x_2 = y, x^3 = x_3 = z, x^4 = x_4 = \mathrm{i}t$. 而 x 的模方为

$$x^2 = x_\mu x_\mu = \delta_{\mu\nu} x_\nu x_\mu = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \boldsymbol{x}^2 - t^2 , \tag{0.6}$$

与(0.4)式相差一负号.

两种度规各有利弊,Bjorken - Drell 度规的利是四维矢量的时间分量不含有虚数因子 i,其弊是必须区分四维矢量的上、下指标. 而 Pauli 度规正好相反,四维矢量的时间分量含有一个虚数因子 i,这是它的弊,但此时不必区分上、下指标,这是它的利.

两种度规都有采用,采用不同的度规,相关公式会有一定的差异,所以应加以注意. 如上所述,本书将采用 Bjorken - Drell 度规.

在 Bjorken - Drell 度规下,常用的四维动量矢量 p 的逆变分量为

$$p^\mu = (E, \boldsymbol{p}),$$

协变分量为

$$p_\mu = g_{\mu\nu} p^\nu = (E, -\boldsymbol{p}),$$

而

$$p^2=p^\mu p_\mu=g^{\mu\nu}p_\nu p_\mu=p^0p_0+p^ip_i=p_0p_0-p_ip_i=E^2-\boldsymbol{p}^2$$
$$\Rightarrow\ \boldsymbol{p}^2=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}=-p^ip_i=p_ip_i,$$

四维时空坐标 x 与四维动量 p 的标积为

$$\begin{aligned}&x\cdot p=xp=x^\mu p_\mu=x_\mu p^\mu=x_0p^0+x_ip^i=x_0p_0-x_ip_i=Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}\\&\Rightarrow\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}=-x_ip^i=x_ip_i,\end{aligned}\tag{0.7}$$

四维时空导数∂的逆变与协变分量分别为

$$\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},-\boldsymbol{\nabla}\right),\quad \partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\boldsymbol{\nabla}\right),\tag{0.8}$$

与(0.1b)、(0.3c)两式相比,空间部分差了一负号,而其平方

$$\begin{aligned}&\partial^2=\partial^\mu\partial_\mu=\partial^0\partial_0+\partial^i\partial_i=\partial_0\partial_0-\partial_i\partial_i=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\\&\Rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}^2=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}=-\partial^i\partial_i=\partial^i\partial^i,\end{aligned}\tag{0.9}$$

与(0.4)或(0.7)式的形式相同,而

$$\begin{aligned}&x^\mu\partial_\mu=x^0\partial_0+x^i\partial_i=x_0\partial_0-x_i\partial_i=t\partial_t+\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}\\&\Rightarrow\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\nabla}=x^i\partial_i=-x_i\partial_i,\end{aligned}\tag{0.10}$$

与(0.4)或(0.7)式相比,空间部分差了一负号.

2. 自然单位制

1) 自然单位制的定义

这里将要讨论的量子场论,是相对论的量子化场理论,因此公式中将经常出现光速 c 和普朗克常数 h,为了使公式简洁,人们通常取

$$c=\hbar=k_{\mathrm{B}}=1,\tag{0.11}$$

其中,$\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$,k_{B} 为玻尔兹曼常数,由此构成的单位制称为自然单位制.可见,在自然单位制中,我们熟悉的速度变得没有单位了.而该单位制中的基本单位只有一个:GeV. 1GeV$=10^9$eV 是一能量单位,任何其他单位都可用 GeV 表示出来.如由 $E=mc^2=m$ 知,质量的单位$[m]=$GeV.又由量子力学中的德布罗意关系知,波长

$$\lambda=\frac{h}{p}\xlongequal{\text{光子}}\frac{\hbar 2\pi}{mc}=\frac{2\pi}{m},$$

故长度的单位$[L]=\mathrm{GeV}^{-1}$.再由真空中光子的周期

$$T=\frac{\lambda}{c}=\lambda$$

知,时间的单位$[t]=\mathrm{GeV}^{-1}$.而任何其他物理量的单位都可由基本单位——质量、长度与时间表示出来,这样它们的单位都可以用 GeV 表示出来,所以在自然单位制中,GeV 是一基本单位.

2）自然单位制与高斯单位制间的换算关系

下面来看一下自然单位制与常用单位制，如厘米、克、秒高斯单位制之间的换算关系. 由于

$$1\ c=2.9979\times10^{10}\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}=(c)\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}，其中(c)=2.9979\times10^{10}；\tag{0.12}$$

$$1\ \hbar=1.0546\times10^{-27}\mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}}=(\hbar)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}}，其中(\hbar)=1.0546\times10^{-27}；\tag{0.13}$$

$$1\ \mathrm{GeV}=10^9\ \mathrm{eV}=1.6022\times10^{-3}\mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-2}}=(\varepsilon)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-2}}，其中(\varepsilon)=1.6022\times10^{-3}.\tag{0.14}$$

由(0.14)式知

$$1\ \mathrm{s}=(\varepsilon)\ \mathrm{g\cdot cm^2\cdot s^{-1}\cdot GeV^{-1}}\xlongequal{(0.13)式}\frac{(\varepsilon)}{(\hbar)}\ \mathrm{GeV^{-1}}\hbar,$$

亦即

$$1\ \mathrm{s}=1.5192\times10^{24}\ \mathrm{GeV^{-1}}.\tag{0.15}$$

又由(0.12)式知

$$1\ \mathrm{cm}=\frac{\mathrm{s}}{(c)}c=5.0675\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}c,$$

亦即

$$1\ \mathrm{cm}=5.0675\times10^{13}\ \mathrm{GeV^{-1}}.\tag{0.16}$$

又由(0.13)式得

$$1\ \mathrm{g}=\frac{\mathrm{s}}{(\hbar)\mathrm{cm}^2}\hbar=5.6097\times10^{23}\ \mathrm{GeV}\hbar,$$

亦即

$$1\ \mathrm{g}=5.6097\times10^{23}\ \mathrm{GeV}.\tag{0.17}$$

3）开尔文在自然单位制中的换算值

开尔文(K)是热力学中的一个常用单位，用于表示绝对温标中的温度单位，现在来看一下该单位在自然单位制中的换算值.

玻尔兹曼常数

$$k_{\mathrm{B}}=1.3807\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}.$$

又

$$1\ \mathrm{eV}=1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{J}\quad 或\quad 1\ \mathrm{J}=6.2414\times10^{9}\ \mathrm{GeV},\tag{0.18}$$

故

$$k_{\mathrm{B}}=8.6175\times10^{-14}\mathrm{GeV\cdot K^{-1}}\xlongequal{(0.11)式}1,$$

这样

$$1\ \mathrm{K}=8.6175\times10^{-14}\ \mathrm{GeV}.\tag{0.19}$$

所以在自然单位制中，开尔文(K)为一能量单位.

4）库仑在自然单位制中的换算值

库仑(C)是电磁学中的一个常用单位，用于表示电量，现在来看一下该单位在自然单位制中的换算值.

真空介电常数

$$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}=8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot J^{-1}\cdot m^{-1}}.$$

由(0.16)与(0.18)两式知

$$1\ \mathrm{J\cdot m}=3.1630\times10^{25},$$

这样

$$\varepsilon_0=2.8005\times10^{-37}\ \mathrm{C^2}.$$

在自然单位制中，由于

$$\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}=1,$$

故

$$\varepsilon_0=\mu_0=1,$$

这样

$$1\ \mathrm{C^2}=3.5707\times10^{36},$$

或者

$$1\ \mathrm{C}=1.8896\times10^{18},\tag{0.20}$$

所以在自然单位制中，库仑(C)是一无量纲的常数.

在量子场论中，经常要用到常数

$$\alpha=\frac{e^2}{4\pi},$$

称为精细结构常数，其中

$$e=1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{C}=0.3028,\tag{0.21}$$

则

$$\alpha=0.0073\simeq\frac{1}{137},\tag{0.22}$$

所以 α 是一个很小的常数.

3.外国人名的标注

本书中的外国人名，在正文中第一次出现时，其汉译名后面都标有外文名，为简洁起见，同一人名再次出现时，将只用其汉译名，外文名不再标出.

4.参考书及其他

在撰写本书的过程中，主要用到如下参考书：胡瑶光编著的《量子场论》；李政道著的《场论与粒子物理学》；J. D. Bjorken 与 S. D. Drell 著的 *Relativistic Quantum*

Fields；朱洪元著的《量子场论》及 D. 卢里著的《粒子和场》等.

该书是根据作者多年来的讲稿编写而成，虽经多次修改，书中的不当之处在所难免，敬请读者不吝批评指正.

最后借此机会，向那些在本书的文字输入方面给予宝贵帮助的同学致以深深的谢意！向为本书的顺利出版而付出辛勤劳动的科学出版社钱俊编辑等致以深深的谢意！

姜志进

2015 年 2 月于上海

目　　录

第1章　自由粒子的相对论波动方程及其平面波解

自由粒子的相对论波动方程及其平面波解是量子场论的基础,其相关内容与结论在后面的讨论中将有重要的应用.本章将讨论自旋为0的标量粒子、自旋为1/2的费米(Fermi)子及自旋为1的光子的相对论波动方程,给出它们的平面波解.这部分内容是量子力学在高速情况下的延伸,所以本章又可名曰相对论量子力学.所得结果,如平面波解,与量子力学中的波函数一样,也是一种几率波,也不能描述粒子的产生与湮灭现象.不同的是,由于低速情况下不存在自旋效应,所有的微观粒子,不管自旋是多少都可统一地由薛定谔方程来描述.但到了高速,粒子的自旋效应将显现出来,从而对其运动规律产生影响,使得不同自旋的微观粒子遵守不同形式的波动方程.因此在相对论量子力学中,不同形式的波动方程描述不同自旋粒子的运动规律,反之亦然,两者一一对应.

1.1　克莱因-戈尔登方程

第一个相对论波动方程是由瑞典物理学家克莱因与德国物理学家戈尔登在1926年建立的,人们称其为克莱因-戈尔登(Klein-Gordon)方程.

1.1.1　方程的导出

由量子力学知,微观粒子的运动规律由方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m}\psi(x)+V(x)\psi(x) \tag{1.1}$$

描述,该方程是奥地利物理学家薛定谔(Schrödinger)于1926年建立的,称为薛定谔方程.该方程的是由低速情况下的机械能

$$E=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(x) \tag{1.2}$$

作代换

$$E\Rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t},\quad \boldsymbol{p}\Rightarrow -\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla},\quad \boldsymbol{x}\Rightarrow \boldsymbol{x}, \tag{1.3}$$

两边再同时作用在波函数上得到的.

薛定谔方程是非相对论的,体现在方程中的时间与空间是不对称的:对时间是一阶导数,对空间是二阶导数;这种不对称来源于(1.2)式中能量与动量的不对称:能量

是一次方的，动量是二次方的. 而相对论认为，时间与空间是相统一的，能量与动量也是相统一的. 所以，一个正确的相对论波动方程应能反映出时间与空间或能量与动量的相互统一性.

基于这样的要求，人们首先想到的自然是相对论的能量-动量关系

$$E^2=\boldsymbol{p}^2c^2+m^2c^4,$$

在自然单位制中，$c=1$，上式变为

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2.$$

能量与动量都是二次方的，地位等同. 用(1.3)式对上式作代换，并作用在波函数 $\phi(x)$ 上得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2+m^2\right)\phi(x)=0,$$

或者写成

$$(\partial^2+m^2)\phi(x)=0,$$

或

$$(\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(x)=0. \tag{1.4}$$

在(1.4)式中，对时间与空间的微分都是二次的，二者地位对等，符合相对论关于时空相统一的要求，所以它是相对论性的波动方程，称为克莱因-戈尔登方程，后面2.5节将证明，该方程描述的是自旋为零的标量粒子.

1.1.2 负能困难

(1.4)式是线性齐次方程，有平面波解

$$\phi(x)\sim \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}k\cdot x}, \tag{1.5}$$

其中，k 是四维动量矢量 $k^\mu=(E,\boldsymbol{k})$，$k\cdot x=Et-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$.

将(1.5)代入(1.4)式得

$$(-k^2+m^2)\phi(x)=0.$$

因此

$$k^2-m^2=E^2-\boldsymbol{k}^2-m^2=0.$$

故

$$E=\pm\omega,\quad \omega=\sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}. \tag{1.6}$$

表明克莱因-戈尔登方程既有正能解，也有负能解，因此克莱因-戈尔登方程描述的粒子，其能量既可以是正的，也可以是负的.

对于自由粒子，负能解不会构成什么困难，因为这时我们可以简单地规定，只有正能态是物理上可以实现的状态，由于自由粒子的能量是一常数，不会发生从正能态到负能态的跃迁，一个正能态上的粒子将始终保持在正能态上. 但若考虑到相互作用，如有微扰存在，由量子力学中的微扰论知，正能态和负能态之间将可能发生跃迁.

由于克莱因-戈尔登方程描述的是自旋为零的玻色(Bose)子,所以,按照物体总是力图使自己处在能量最低态的规律,粒子都会力图下落到能量 $E \Rightarrow -\infty$ 的状态,这将会导致自然界的灾难,这就是克莱因-戈尔登方程的负能困难,由后面的讨论知,这其实是所有自由粒子相对论理论所共有的困难.由于该困难的存在,克莱因-戈尔登方程提出后不久就被搁置了起来,直到 1934 年,泡利(Pauli)与韦斯科普夫(Weisskopf)将其量子化(参见 3.2 节和 3.3 节),负能困难才被克服,该理论也就随之得以复活了.

若取 $k^{\mu}=(\omega,\boldsymbol{k})$,则 $k\cdot x=\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$,而

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}}{\partial t}=+\omega \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},\quad -\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}=\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}}{\partial t}=-\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},\quad -\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}=-\boldsymbol{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},$$

因此 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$是正能、正动量解,简称为正能解;$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$是负能、负动量解,简称为负能解;有时亦称 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$为正频解,$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$为负频解.

1.1.3　正交归一平面波解

对于正能解 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$,人们通常取形式

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},\tag{1.7}$$

其中,V 是归一化体积,在体积 V 内,它满足正交归一化条件

$$\int_V f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x=\delta_{\boldsymbol{kk'}},\quad \int_V f_k(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x=0,$$
$$\int_V f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(x)\mathrm{d}^3x=0,\tag{1.8}$$

其中的$\overleftrightarrow{\partial}_0$ 定义为

$$a\overleftrightarrow{\partial}_0 b=a\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}b.\tag{1.9}$$

将(1.7)代入(1.8)第 1 式得

$$\begin{aligned}\int_V f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x&=\int_V\left[f_k^*(x)\mathrm{i}\frac{\partial f_{k'}(x)}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\partial f_k^*(x)}{\partial t}f_{k'}(x)\right]\mathrm{d}^3x\\&=\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega+\omega')\int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')\cdot x}\mathrm{d}^3x\\&=\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega+\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x.\end{aligned}$$

式中,当 $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}'$ 时,$\omega=\omega'$,$\int_V \mathrm{d}^3x=V$,故等式右边等于 1.当 $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{k}'$ 时,因 $\mathrm{d}^3x=$

$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，对任一直角坐标，如 x 的积分得

$$\int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x-k_x)x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{i}(k'_x-k_x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x-k_x)x}\bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

若假设边界条件具有周期性，即假设

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x-k_x)x_1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k'_x-k_x)x_2},$$

则上式积分为零，这就证明了正交归一关系(1.8)第1式，同样的方法可证明其他两式.

1.2 狄拉克方程

由相对论的能量-动量关系出发，通过算符代换，克莱因与戈尔登得到了自由粒子的相对论波动方程，但却引出了负能困难，如前所述，该困难在量子化后将不复存在，所以克莱因-戈尔登方程实际上是一个正确的相对论波动方程. 但是，当时人们并没有意识到这一点，认为负能困难可能反映克莱因-戈尔登方程有问题，正确的相对论波动方程应取其他形式. 1928年，英国物理学家狄拉克(Dirac)提出了另一个相对论波动方程，人们称其为狄拉克方程.

1.2.1 方程的导出

狄拉克认为，正确的相对论波动方程应是时空的一阶导数，而不应像克莱因-戈尔登方程那样是二阶的. 为了得到这样的方程，他将相对论的能量-动量关系

$$E^2-\boldsymbol{p}^2-m^2=0$$

分解为

$$\left(E+\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\right)\left(E-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}\right)=0.$$

但在上式中，若把 $\boldsymbol{p}$ 换成算符，$\sqrt{-\nabla^2+m^2}$ 就变得没有意义了，为此，狄拉克提出用 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m$ 来代替 $\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$，这样

$$E^2-\boldsymbol{p}^2-m^2=(E+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m),\tag{1.10}$$

将其中的一个因子，如$(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m)$换成算符，并作用在波函数 $\psi(x)$ 上得

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla-\beta m\right)\psi(x)=0,\tag{1.11}$$

该式即为狄拉克方程.

1.2.2 狄拉克矩阵与狄拉克方程的协变形式

(1.11)式表明，狄拉克方程所描述的粒子的哈密顿算符为

$$H=-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m,\tag{1.12}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 是(1.10)式引入的两个量，下面来确定它们的具体形式.

由(1.10)式知

$$\begin{aligned} E^2-\boldsymbol{p}^2-m^2 &= E^2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)^2 \\ &= E^2-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})^2-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\beta m-\beta m\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta^2 m^2 \\ &= E^2-\alpha_i\alpha_j p_i p_j-\alpha_i p_i\beta m-\beta m\alpha_i p_i-\beta^2 m^2 \\ &= E^2-\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_i p_j-(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)m p_i-\beta^2 m^2, \end{aligned}$$

其中最后一步用到了关系 $\alpha_i\alpha_j p_i p_j=\alpha_j\alpha_i p_j p_i=(1/2)(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)p_i p_j$，比较上式两边知

$$\frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i)=\delta_{ij},\quad \alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0,\quad \beta^2=1. \tag{1.13}$$

这就是狄拉克方程中引入的 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 所必须满足的关系，即它们彼此反对易，而且任一分量的平方都等于 1，显然它们不可能是普通的数，应该是矩阵.

由于哈密顿量(1.12)是厄米的，所以矩阵 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 也应该是厄米的，即

$$\alpha_i^\dagger=\alpha_i,\quad \beta^\dagger=\beta. \tag{1.14}$$

另外，它们都是无迹的，即

$$\mathrm{Tr}\alpha_i=0,\quad \mathrm{Tr}\beta=0. \tag{1.15}$$

这是因为

$$\mathrm{Tr}\alpha_i=\mathrm{Tr}(\alpha_i\beta^2)=\mathrm{Tr}(\beta\alpha_i\beta)=-\mathrm{Tr}(\alpha_i\beta^2)=-\mathrm{Tr}\alpha_i,$$

上式第一步用到了等式 $\beta^2=1$，第二步用到了关系 $\mathrm{Tr}(ABC)=\mathrm{Tr}(CAB)=\mathrm{Tr}(BCA)$，即求迹运算中各因子位置的轮换，其值不变. 这样

$$\mathrm{Tr}\alpha_i=0,$$

同理可证

$$\mathrm{Tr}\beta=0.$$

$\alpha_i^2=1$ 和 $\beta^2=1$ 意味着它们的本征值为 ±1，对角化以后，α_i、β 矩阵对角线上的元素为 $+1$ 或 -1，由于无迹，它们应为偶阶矩阵. 所以，α_i 与 β 是 $n\times n$ 矩阵，其中 n 为偶数. 偶阶矩阵中，最低阶的是 2×2 矩阵，线性独立的共有 4 个，通常取

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

其中，第 1 个是 2×2 单位矩阵，后 3 个是泡利矩阵，而任一其他的 2×2 矩阵都可由它们线性组合而成，可是由它们和它们的线性组合构成的矩阵，都不能满足(1.13)～(1.15)式的要求，所以不能用作我们所需的 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 矩阵.

2×2 矩阵不能满足要求，能满足要求的最低偶阶矩阵就是 4×4 矩阵了，能满足要求的 4×4 矩阵有无穷多个，人们通常取

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 β 的标准表示.由它们再定义矩阵

$$\gamma_0=\gamma^0=\beta=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}=\beta\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$
$$\gamma^\mu=(\gamma^0,\boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma_\mu=(\gamma_0,-\boldsymbol{\gamma}),$$

称为狄拉克矩阵,它们是 4×4 矩阵,共有 4 个,满足关系

$$\begin{aligned} &\gamma_0^2=1, \quad \gamma_i^2=-1, \\ &\gamma_0^\dagger=\gamma_0=\gamma_0^{-1}, \quad \gamma_i^\dagger=-\gamma_i=\gamma_i^{-1}, \\ &\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma_\mu=2g_\mu^\nu=2\delta_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

即狄拉克矩阵是反对易的,且 γ_0 是厄米、幺正的,γ_i 是反厄米、幺正的.γ_0 的本征值为+1 或-1,γ_i 的本征值为+i 或-i.(1.19)各式的证明是简单的,如

$$\gamma_i^\dagger=(\beta\alpha_i)^\dagger=\alpha_i^\dagger\beta^\dagger=\alpha_i\beta=-\beta\alpha_i=-\gamma_i,$$

再如

$$\gamma_i\gamma_j+\gamma_j\gamma_i=\beta\alpha_i\beta\alpha_j+\beta\alpha_j\beta\alpha_i=-\alpha_i\alpha_j-\alpha_j\alpha_i \xlongequal{(1.13)\text{式}} -2\delta_{ij}=2g_{ij}.$$

(1.18)与(1.19)两式给出了狄拉克矩阵的表达式、基本性质及对易关系,它们在后面的相关讨论中将经常被用到.

由狄拉克矩阵可定义另一 4×4 矩阵

$$\gamma_5=\gamma^5=-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3=\mathrm{i}\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3=\begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.20}$$

称为手征算符,显然

$$\gamma_5^2=1, \quad \gamma_5^\dagger=\gamma_5=\gamma_5^{-1}, \quad \gamma_5\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma_5=0, \tag{1.21}$$

即 γ_5 是厄米、幺正的,本征值为±1,与各 γ 矩阵都是反对易的.

用 γ_0 左乘(1.11)式得

$$\left(\gamma_0\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\gamma_0\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}-m\right)\psi(x)=0,$$

注意到(1.18)与(0.10)式,上式变为

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi(x)=0, \tag{1.22}$$

为狄拉克方程的协变形式.

对(1.22)式取厄米共轭得

$$\psi^\dagger(x)(-\mathrm{i}\gamma_\mu^\dagger\overleftarrow{\partial}^\mu-m)=0,$$

其中,符号 $\overleftarrow{\partial}^\mu$ 表示对其左边的 $\psi^\dagger(x)$ 求导数,再以 γ_0 右乘上式,并注意到(1.19)式得

$$\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)=0, \tag{1.23}$$

其中,$\bar{\psi}(x)=\psi^\dagger(x)\gamma_0$,称为 $\psi(x)$ 的共轭波函数.(1.23)式即为该共轭波函数所满足的狄拉克方程.

1.2.3　负能、空穴与真空

狄拉克方程(1.11)或(1.22)是关于 $\psi(x)$ 的线性齐次方程，有平面波解 e^{-ipx}，将其代入(1.11)式得

$$(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m)\psi(x)=0.$$

左乘 $E+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m$ 并利用(1.10)式得

$$(E^2-\boldsymbol{p}^2-m^2)\psi(x)=0,$$

则有

$$E^2=\boldsymbol{p}^2+m^2,\quad \Rightarrow E=\pm E_p,\quad E_p=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}. \tag{1.24}$$

即狄拉克方程也有正能与负能解，所以狄拉克方程描述的自由粒子也有负能问题，但与克莱因-戈尔登方程的情况不同，这里的负能不会构成什么困难. 下面将证明，狄拉克方程描述的是自旋为 1/2 的费米子，服从泡利不相容原理，每个量子态上至多只能有一个粒子，所以狄拉克认为：真空为所有负能态都被填满，而所有正能态都空着的状态. 正能态有粒子或负能态空着的状态，是物理上可观察的状态. 负能态空着的状态是空穴状态，它是由负能态上的粒子在获得足够高的能量跃迁到正能态后留下的空位所致. 当然，处在正能态上的粒子也可由于失去能量而回落到空穴，这就是空穴理论，该理论在半导体与固体物理中有着重要的应用.

按照狄拉克假设，真空由负能粒子组成，而真空不存在可测量的物理效应，所以负能粒子在实验上是测不到的，这样负能粒子可能带来的麻烦被巧妙地排除掉了. 由后面的讨论可以看到(参见 3.4 节)，即使量子化后，狄拉克方程的负能现象仍然存在，且真空确实存在着负能，从而证明了狄拉克有关负能真空假设的正确性. 不但如此，其他粒子，如标量粒子与光子，量子化后也存在着真空能(参见 3.2 与 3.3 及 3.5 与 3.6 节)，只不过它们的真空能是正的. 真空存在能量、空而不空，这是一个被广泛实验与理论证明了的客观事实.

1.2.4　粒子的自旋

运动粒子的能量、动量及角动量都是守恒量的，由量子力学知，表示守恒量的算符应与能量算符相对易. 狄拉克方程描述的粒子的哈密顿算符由(1.12)式给出，轨道角动量算符为

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}\quad 或\quad L_i=\varepsilon_{ijk}x_j p_k, \tag{1.25}$$

其中，ε_{ijk} 是莱维-席维特(Levi - Civita)符号，是一三阶(有 3 个指标)三维(每指标有 3 个取值 1、2、3)完全反对称张量，即相邻两指标交换一次出现一负号，且 $\varepsilon_{123}=1$. 坐标与动量算符满足对易关系

$$[x_i,p_j]=i\delta_{ij},\quad [x_i,x_j]=0,\quad [p_i,p_j]=0. \tag{1.26}$$

由此可以推知

$$[H,\ p_i]=[\alpha_j p_j+\beta m,\ p_i]=0, \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned}[H,\ L_i]&=[\alpha_s p_s+\beta m,\ \varepsilon_{ijk}x_j p_k]=\varepsilon_{ijk}\alpha_s[p_s,\ x_j]p_k\\&=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\alpha_s p_k\delta_{sj}=-\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k.\end{aligned} \tag{1.28}$$

这表明,狄拉克方程描述的自由粒子,其能量、动量为守恒量,而轨道角动量不守恒.但如前所述,运动粒子的角动量应该守恒,(1.28)式反映的角动量不守恒,意味着粒子除了轨道角动量外,还应该有别的角动量,为此定义算符

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\sigma}I,\quad 或\quad \Sigma_i=\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & \sigma_i\end{pmatrix}=\sigma_i I, \tag{1.29}$$

其中,I 为 2×2 单位矩阵,则

$$\left[H,\ \frac{1}{2}\Sigma_i\right]=\left[\alpha_k p_k+\beta m,\ \frac{1}{2}\sigma_i\right]=\frac{1}{2}p_k[\alpha_k,\ \sigma_i]+\frac{1}{2}m[\beta,\ \sigma_i],$$

其中

$$[\beta,\ \sigma_i]=\beta\sigma_i-\sigma_i\beta\xlongequal{(1.17)式}\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}=0,$$

$$\begin{aligned}[\alpha_k,\ \sigma_i]&=\alpha_k\sigma_i-\sigma_i\alpha_k\xlongequal{(1.17)式}\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\sigma_i\\ \sigma_k\sigma_i & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\sigma_k\\ \sigma_i\sigma_k & 0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0 & [\sigma_k,\ \sigma_i]\\ [\sigma_k,\ \sigma_i] & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\mathrm{i}\varepsilon_{kij}\sigma_j\\ 2\mathrm{i}\varepsilon_{kij}\sigma_j & 0\end{pmatrix}=2\mathrm{i}\varepsilon_{kij}\alpha_j.\end{aligned}$$

这样

$$\left[H,\ \frac{1}{2}\Sigma_i\right]=\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\alpha_j p_k, \tag{1.30}$$

(1.28)与(1.30)两式表明

$$\left[H,\ L_i+\frac{1}{2}\Sigma_i\right]=0,\ \Rightarrow\ \left[H,\ \boldsymbol{L}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right]=0,$$

这表明 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{\Sigma}/2$ 是守恒量,由于 $\boldsymbol{L}$ 是轨道角动量,所以

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}I \tag{1.31}$$

是狄拉克方程所描述粒子的固有角动量,称为自旋角动量,简称为自旋.由于

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s}^2&=\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\Sigma_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\Sigma_2\right)^2+\left(\frac{1}{2}\Sigma_3\right)^2\\&=\frac{1}{4}\sigma_1^2+\frac{1}{4}\sigma_2^2+\frac{1}{4}\sigma_3^2=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right),\end{aligned}$$

表明粒子的自旋为 1/2,因此狄拉克方程描述的是自旋为 1/2 的自由粒子的运动规律.

1.2.5　动量空间的旋量波函数

现在来求解狄拉克方程(1.11).设其平面波解为

$$\psi(x)=\psi(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{1.32}$$

将其代入(1.11)式,得动量空间的狄拉克方程

$$(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m)\psi(p)=0. \tag{1.33}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是 4×4 矩阵,$\psi(p)$应是 4×1 矩阵,即为 3/2 阶旋量波函数(旋量分量数 $=2\times$旋量阶数$+1$),将其写成

$$\psi(p)=\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

其中,χ 与 ϕ 都是 2×1 矩阵,将其代入(1.33)式得

$$\left[\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}E-\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\cdot\boldsymbol{p}-\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}m\right]\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=0,$$

亦即

$$\begin{pmatrix}E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & E+m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=0,$$

展开得

$$\begin{aligned}&(E-m)\chi-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi=0,\\ &-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi+(E+m)\phi=0.\end{aligned} \tag{1.35}$$

由前面的讨论知,狄拉克方程有正、负能解,如(1.24)式所示.当 $E=+E_p$ 时,由(1.35)第 2 式知

$$\phi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\chi,$$

则

$$\psi_+(p)=\begin{pmatrix}\chi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\chi\end{pmatrix}, \tag{1.36}$$

当 $E=-E_p$ 时,由(1.35)第 1 式知

$$\chi=\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\phi,$$

则

$$\psi_-(p)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\phi\\ \phi\end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

(1.36)与(1.37)式分别为狄拉克方程的正能与负能解,其中 χ 与 ϕ 是 2×1 矩阵,它

们的形式是任意的,不能由狄拉克方程确定,通常将它们统一地取成自旋算符第 3 分量的本征态 $\chi_s\ (s=1,2)$,其中

$$\chi_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \chi_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.38}$$

这样(1.36)与(1.37)两式可改写成

$$\begin{aligned} u(p,s)&=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\end{pmatrix}\quad (E,\boldsymbol{p}),\\ v(p,s)&=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix}\quad (-E,-\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{1.39}$$

它们满足运动方程

$$\begin{aligned} &(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0,\\ &(-\gamma\cdot p-m)v(p,s)=0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p,s)(\gamma\cdot p-m)=0,\\ &\bar{v}(p,s)(-\gamma\cdot p-m)=0. \end{aligned} \tag{1.41}$$

因为由(1.33)式知,$u(p,s)$满足方程

$$(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m)u(p,s)=0,\ \Rightarrow\ (\gamma_0 E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m)u(p,s)=0,$$

$$\Rightarrow(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0,\ \Rightarrow\ (1.40)\text{第 1 式}.$$

变(1.33)式中的 $E\Rightarrow -E,\boldsymbol{p}\Rightarrow -\boldsymbol{p}$,得 $v(p,s)$满足方程

$$(-E+\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}-\beta m)v(p,s)=0,\ \Rightarrow\ (-\gamma_0 E+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m)v(p,s)=0,$$

$$\Rightarrow(-\gamma\cdot p-m)v(p,s)=0,\ \Rightarrow\ (1.40)\text{第 2 式}.$$

(1.40)与(1.41)两式是狄拉克方程(1.22)与(1.23)两式在动量空间中的形式,在后面的有关讨论中将经常用到它们.

最后再值一提的是:狄拉克方程的解,在动量空间是如(1.39)式所示的 4 分量或 3/2 阶旋量波函数,在时空空间是如(1.32)式所示的平面波,是单分量或 0 阶旋量波函数,是一标量函数.

1.2.6 旋量波函数的自旋求和

可以证明,旋量波函数满足如下的自旋求和公式

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{2}u(p,s)\bar{u}(p,s)&=\frac{\gamma\cdot p+m}{2m},\\ \sum_{s=1}^{2}v(p,s)\bar{v}(p,s)&=\frac{\gamma\cdot p-m}{2m}. \end{aligned} \tag{1.42}$$

这两自旋求和公式在后面的相关讨论中要经常用到.

例 1.1　证明(1.42)式的自旋求和公式.

证明

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) &= \sum_{s=1}^{2} u(p,s)u^{\dagger}(p,s)\gamma_0 \\ &= \frac{E+m}{2m}\sum_{s=1}^{2}\begin{pmatrix}\chi_s \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_s^{\dagger} & -\chi_s^{\dagger}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix} \\ &= \frac{E+m}{2m}\sum_{s=1}^{2}\begin{pmatrix}\chi_s\chi_s^{\dagger} & -\chi_s\chi_s^{\dagger}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^{\dagger} & -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^{\dagger}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{s=1}^{2}\chi_s\chi_s^{\dagger} = \chi_1\chi_1^{\dagger}+\chi_2\chi_2^{\dagger} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\quad 0)+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\quad 1) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

即

$$\sum_{s=1}^{2}\chi_s\chi_s^{\dagger} = I. \tag{1.43}$$

又

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2 &= \sigma_i p_i \sigma_j p_j = \frac{1}{2}(\sigma_i p_i \sigma_j p_j + \sigma_j p_j \sigma_i p_i) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j+\sigma_j\sigma_i)p_i p_j = \delta_{ij}p_i p_j,\end{aligned}$$

即

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})^2 = \boldsymbol{p}^2 = E^2 - m^2. \tag{1.44}$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) &= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix}E+m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -(E-m)\end{pmatrix} \\ &\xlongequal{(1.18)\text{式}} \frac{1}{2m}(\gamma_0 E - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}+m),\end{aligned}$$

亦即

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \frac{\gamma\cdot p+m}{2m}, \Rightarrow \text{(1.42)第 1 式}.$$

同样

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\bar{v}(p,s) &= \sum_{s=1}^{2} v(p,s)v^{\dagger}(p,s)\gamma_0 \\ &= \frac{E+m}{2m}\sum_{s=1}^{2}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s \\ \chi_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_s^{\dagger}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -\chi_s^{\dagger}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$= \frac{E+m}{2m}\sum_{s=1}^{2}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\chi_s^{\dagger} \\ \chi_s\chi_s^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & -\chi_s\chi_s^{\dagger} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}\begin{pmatrix} E-m & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & -(E+m) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2m}(\gamma_0 E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}-m),$$

亦即

$$\sum_{s=1}^{2} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \frac{\gamma\cdot p-m}{2m}, \Rightarrow \text{(1.42)第 2 式.}$$

1.2.7 旋量波函数的正交归一关系

可以证明,旋量波函数满足如下正交归一关系

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p,s)u(p,s')=\delta_{ss'}, \\ &u^{\dagger}(p,s)u(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'}, \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} &\bar{v}(p,s)v(p,s')=-\delta_{ss'}, \\ &v^{\dagger}(p,s)v(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\begin{aligned} &\bar{u}(p,s)v(p,s')=\bar{v}(p,s)u(p,s')=0, \\ &v^{\dagger}(p,s)u(E,-\boldsymbol{p},s')=u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')=0, \end{aligned} \tag{1.47}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{2}[u(p,s)\bar{u}(p,s)-v(p,s)\bar{v}(p,s)]=I, \\ &\sum_{s=1}^{2}[u(p,s)u^{\dagger}(p,s)+v(E,-\boldsymbol{p},s)v^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},s)]=\frac{E}{m}I. \end{aligned} \tag{1.48}$$

在后面的有关讨论中将经常用到这些正交关系.

例 1.2 证明(1.45)～(1.48)各式的正交归一关系.

证明 为简明起见,这里只对部分关系给出证明,读者可参考所用方法,对其他各式自证之.如

$$\bar{u}(p,s)u(p,s')=u^{\dagger}(p,s)\gamma_0 u(p,s')$$

$$=\frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix}\chi_s^{\dagger} & -\chi_s^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{s'} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s'}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{E+m}{2m}\left[\chi_s^\dagger\chi_{s'}-\chi_s^\dagger\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\right)^2\chi_{s'}\right],$$

注意到(1.44)式及 $\chi_s^\dagger\chi_{s'}=\delta_{ss'}$，

$$\bar{u}(p,s)u(p,s')=\frac{E+m}{2m}\left(1-\frac{E-m}{E+m}\right)\delta_{ss'}=\delta_{ss'}.$$

又如

$$v^\dagger(p,s)u(E,-\boldsymbol{p},s')=\frac{E+m}{2m}\begin{pmatrix}\chi_s^\dagger\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m} & \chi_s^\dagger\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{s'}\\ -\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s'}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{E+m}{2m}\left(\chi_s^\dagger\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s'}-\chi_s^\dagger\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s'}\right)$$

$$=0.$$

再如，(1.42)第 1 式减第 2 式，得(1.48)第 1 式，类似的方法可证明其他各式.

1.2.8　狄拉克方程的平面波解

将 $u(p,s)$ 与 $v(p,s)$ 代入(1.32)式，得到具有一定能量、动量及自旋第 3 分量取向的时空平面波函数

$$\begin{aligned}\psi_{ps}(x)&=\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\quad(s=1,2;E,\boldsymbol{p}),\\ \psi_{-ps}(x)&=\sqrt{\frac{m}{VE}}v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\quad(s=1,2;-E,-\boldsymbol{p}).\end{aligned}\tag{1.49}$$

其中，$\sqrt{m/VE}$ 是归一化因子，使得二者按如下方式正交归一

$$\begin{aligned}\int_V\psi_{ps}^\dagger(x)\psi_{p's'}(x)\mathrm{d}^3x&=\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{pp}'},\\ \int_V\psi_{-ps}^\dagger(x)\psi_{-p's'}(x)\mathrm{d}^3x&=\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{pp}'},\end{aligned}\tag{1.50}$$

$$\int_V\psi_{ps}^\dagger(x)\psi_{-E'\boldsymbol{p}'s'}(x)\mathrm{d}^3x=\int_V\psi_{-E\boldsymbol{p}s}^\dagger(x)\psi_{p's'}(x)\mathrm{d}^3x=0,\tag{1.51}$$

$$\sum_s\int_V[\psi_{ps}(x)\psi_{ps}^\dagger(x)+\psi_{-ps}(x)\psi_{-ps}^\dagger(x)]\mathrm{d}^3x=I.\tag{1.52}$$

由于

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi_{ps}(x)=(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)\psi_{ps}(x)$$

$$=(\gamma\cdot p-m)\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\xlongequal{(1.40)式}0,$$

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi_{-ps}(x)=(-\gamma\cdot p-m)\sqrt{\frac{m}{VE}}v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\xlongequal{(1.40)式}0,$$

所以波函数 $\psi_{ps}(x)$ 与 $\psi_{-ps}(x)$ 满足狄拉克方程

$$(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi_{\pm ps}(x)=0. \tag{1.53}$$

例 1.3　证明(1.50)～(1.52)各式的正交归一关系.

证明　与前面一样,这里只证明部分关系,其他各式读者可自证之.如

$$\int_V \psi_{ps}^{\dagger}(x)\psi_{p's'}(x)\mathrm{d}^3x=\sqrt{\frac{m}{VE}}\sqrt{\frac{m}{VE'}}u^{\dagger}(p,s)u(p',s')\int_V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p'-p)\cdot x}\mathrm{d}^3x$$

$$\xlongequal{(1.45)\text{式}}\frac{m}{VE}\frac{E}{m}\delta_{ss'}V\delta_{\boldsymbol{pp}'}=\delta_{ss'}\delta_{\boldsymbol{pp}'}.$$

又如

$$\psi_{-E\boldsymbol{p}s}(x)\xlongequal{(1.49)\text{式}}\sqrt{\frac{m}{VE}}v(E,-\boldsymbol{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})}\quad(-E,\boldsymbol{p}),$$

$$\psi_{ps}^{\dagger}(x)=\sqrt{\frac{m}{VE}}u^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}=\sqrt{\frac{m}{VE}}u^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})},$$

则

$$\begin{aligned}
&\int_V \psi_{ps}^{\dagger}(x)\psi_{-E'\boldsymbol{p}'s'}(x)\mathrm{d}^3x\\
&=\frac{m}{V}\frac{1}{\sqrt{EE'}}u^{\dagger}(p,s)v(E',-\boldsymbol{p}',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E+E')t}\int_V \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x\\
&=\frac{m}{V}\frac{1}{\sqrt{EE'}}u^{\dagger}(p,s)v(E',-\boldsymbol{p}',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(E+E')t}\delta_{\boldsymbol{pp}'}V\\
&=\frac{m}{E}u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Et}\xlongequal{(1.47)\text{式}}0.
\end{aligned}$$

同样的方法可证明其他正交关系.

1.2.9　狄拉克矩阵的求迹定理

狄拉克矩阵的求迹运算,在后面的相关讨论中要经常用到,这里将对其运算规则作一专门的讨论.

关于狄拉克矩阵的求迹运算,可归纳为如下三条定理.

定理 I　奇数个 γ 矩阵乘积的迹等于零,即

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n})=0, \tag{1.54}$$

其中,n=奇数.

证明　由于

$$\gamma_5^2=1,\quad \mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA),\quad \gamma_5\gamma_{\mu}=-\gamma_{\mu}\gamma_5,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) &= \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5^2) = \mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5)\\ &= -\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_5^2) = -\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}),\\ &\Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) = 0.\end{aligned}$$

定理Ⅱ　成对出现的 γ 矩阵乘积的迹为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) = 4g_{\mu\nu},\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho) = 4(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} + g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}),\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) = g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) - g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n})\\ &\qquad + g_{\mu_1\mu_4}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}) + \cdots\\ &\qquad + g_{\mu_1\mu_n}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}).\end{aligned} \tag{1.55}$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu) &= \mathrm{Tr}(\gamma_\nu\gamma_\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu)\\ &= \mathrm{Tr}g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\mathrm{Tr}I = 4g_{\mu\nu},\ \Rightarrow\ (1.55)\text{第 1 式得证.}\end{aligned}$$

利用对易关系

$$\begin{aligned}&\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu},\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_n}) = \mathrm{Tr}[(2g_{\mu_1\mu_2} - \gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1})\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}]\\ &\quad = 2g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) - \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n})\\ &\quad = 2g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) - \mathrm{Tr}[\gamma_{\mu_2}(2g_{\mu_1\mu_3} - \gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1})\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}]\\ &\quad = 2g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) - 2g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n})\\ &\qquad + \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n})\\ &\quad = 2g_{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_3}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) - 2g_{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_4}\cdots\gamma_{\mu_n}) + \cdots\\ &\qquad + 2g_{\mu_1\mu_n}\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_{n-1}}) - \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}),\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}\gamma_{\mu_1}) = \mathrm{Tr}(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\gamma_{\mu_3}\cdots\gamma_{\mu_n}),$$

上式移项后即得(1.55)第 3 式.由第 1 与第 3 式即可得第 2 式.

定理Ⅲ　含有 γ_5 的矩阵乘积的迹为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\gamma_5 = 0,\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu) = 0,\\ &\mathrm{Tr}(\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho) = -4\mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}.\end{aligned} \tag{1.56}$$

其中,$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$ 为四阶四维莱维-席维特完全反对称张量,其中 $\varepsilon_{0123}=1$.

由定理Ⅱ知,只有两两成对 γ 矩阵乘积的迹才不为零,且为 ±4,由此可推知定理Ⅲ是成立的.

1.2.10　狄拉克矩阵的夹积定理

该定理说的是两收缩的 γ 矩阵间夹有多个 γ 矩阵的运算问题，也是一种常用的运算形式. 常用公式如下

$$\begin{aligned}
&\gamma_\mu\gamma^\mu=4,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma\gamma^\mu=-2a\cdot\gamma,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^\mu=4a\cdot b,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma\gamma^\mu=-2c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma,\\
&\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma d\cdot\gamma\gamma^\mu=2(d\cdot\gamma a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma+c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma d\cdot\gamma).
\end{aligned}\tag{1.57}$$

证明　上面第 1 式是显然成立的. 第 2 式为

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu a\cdot\gamma\gamma^\mu&=a_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu=a_\nu\gamma_\mu(2g^{\nu\mu}-\gamma^\mu\gamma^\nu)\\
&=2a\cdot\gamma-4a\cdot\gamma=-2a\cdot\gamma,\ \Rightarrow\ \text{(1.57)第 2 式得证.}
\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^\mu&=\gamma_\mu a_\nu\gamma^\nu b_\lambda\gamma^\lambda\gamma^\mu=a_\nu b_\lambda\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu\\
&=a_\nu b_\lambda[\gamma_\mu\gamma^\nu(2g^{\lambda\mu}-\gamma^\mu\gamma^\lambda)]=a_\nu b_\lambda(2\gamma^\lambda\gamma^\nu-\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\lambda)\\
&=a_\nu b_\lambda[2(2g^{\lambda\nu}-\gamma^\nu\gamma^\lambda)-\gamma_\mu(2g^{\nu\mu}-\gamma^\mu\gamma^\nu)\gamma^\lambda]\\
&=4a\cdot b-2a_\nu b_\lambda\gamma^\nu\gamma^\lambda-2a_\nu b_\lambda\gamma^\nu\gamma^\lambda+4a_\nu b_\lambda\gamma^\nu\gamma^\lambda\\
&=4a\cdot b,\ \Rightarrow\ \text{(1.57)第 3 式得证.}
\end{aligned}$$

再

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma\gamma^\mu&=\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\mu\\
&=\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c_\alpha(2g^{\alpha\mu}-\gamma^\mu\gamma^\alpha)\\
&=\underbrace{2c\cdot\gamma a\cdot\gamma b\cdot\gamma}_{(1)}-\underbrace{\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^\mu c\cdot\gamma}_{(2)},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
(1)&=2c\cdot\gamma a_\alpha b_\beta\gamma^\alpha\gamma^\beta=2c\cdot\gamma a_\alpha b_\beta(2g^{\alpha\beta}-\gamma^\beta\gamma^\alpha)\\
&=4c\cdot\gamma a\cdot b-2c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma,\\
(2)&\xlongequal{\text{(1.57)第 3 式}}4a\cdot bc\cdot\gamma,\\
(1)&-(2)=-2c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma,\ \Rightarrow\ \text{(1.57)第 4 式得证.}
\end{aligned}$$

同样的方法可证明(1.57)第 5 式，读者可自证之.

1.3　中微子波函数

1.3.1　中微子的狄拉克方程

由 1.2 节的讨论知，狄拉克方程(1.11)描述的是自旋为 1/2 的粒子，如电子、质子、中子及夸克等. 中微子的自旋也等于 1/2，理论上认为，自然界有三种或三味中微

子:电子中微子,μ 子中微子与 τ 子中微子,它们都是电中性的且质量都为零.这样,中微子的狄拉克方程为

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\psi(x)=0. \tag{1.58}$$

中微子与其他物质的作用很弱,以至于可自由地穿越地球,有宇宙“隐身人”之称,这使得对它们的实验测量变得很困难.中微子还有另一种特殊的性质,就是在其以接近于光速运动的过程中,不同味道的中微子间可以相互转化,这称为中微子振荡,已得到实验的很好证实.该振荡现象表明中微子的质量并不为零,应有一定的取值,这与上面的假设是不一致的.现有实验测量表明,中微子的质量非常小,其上限仅为电子质量(0.51 MeV)的百万分之一. 这样的小质量是如何产生的呢? 中微子振荡现象的产生机制又是什么呢? 现有理论无法解释. 所以,中微子振荡现象是物理天空中的一小朵白云,正在孕育着一种新物理. 当然,未来新物理的诞生并不是对现有理论的否定,两者只是适用的条件不同,且新物理在一定的条件下应回到现有理论. 如前所述,现有理论认为,中微子的质量为零,其运动方程取(1.58)式,由该式知,中微子的哈密顿算符为

$$H=-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}. \tag{1.59}$$

而(1.58)式的协变形式为

$$\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x)=0. \tag{1.60}$$

1.3.2　动量空间中微子的旋量波函数

方程(1.58)是关于 $\psi(x)$ 的线性齐次方程,有平面波解

$$\psi(x)=\psi(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}, \tag{1.61}$$

将其代入(1.58)式,得动量空间的狄拉克方程

$$(E-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p})\psi(p)=0, \tag{1.62a}$$

或写成协变形式

$$\gamma\cdot p\psi(p)=\gamma^{\mu}p_{\mu}\psi(p)=0. \tag{1.62b}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}$ 或 γ 是 4×4 矩阵,$\psi(p)$ 应是 4×1 矩阵,即 $\psi(p)$ 应为 3/2 阶旋量波函数,与前面(1.34)式一样,记

$$\psi(p)=\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}, \tag{1.63}$$

其中,χ 与 ϕ 都是 2×1 阶矩阵,代入(1.62a)式得

$$\begin{pmatrix}E & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p} & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=0,$$

展开得

$$\begin{aligned}&E\chi-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\phi=0,\\ &-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi+E\phi=0.\end{aligned} \tag{1.64}$$

注意到(1.44)式,由以上两式可得

$$E^2=\boldsymbol{p}^2,$$

故

$$E=\pm E_p,\quad E_p=|\boldsymbol{p}|, \tag{1.65}$$

因此(1.63)式也有正能解与负能解.

当 $E=E_p$ 时,由(1.64)第 2 式得

$$\phi=\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p}\chi,$$

而此时

$$\psi_+(p)=\begin{pmatrix}\chi\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p}\chi\end{pmatrix}, \tag{1.66}$$

它是中微子的正能解. 当 $E=-E_p$ 时,由(1.64)第 1 式得

$$\chi=-\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p}\phi,$$

此时

$$\psi_-(p)=\begin{pmatrix}-\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p}\phi\\ \phi\end{pmatrix}, \tag{1.67}$$

它是中微子的负能解.

(1.66)与(1.67)两式中的 χ 和 ϕ 都是 2×1 矩阵,它们不能由狄拉克方程确定,为了确定它们,引入螺旋度的概念,定义为

$$h=\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p}=\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n}\xlongequal{(1.31)\text{式}}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}, \tag{1.68}$$

其中

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{p}}{E_p}=\frac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{1.69a}$$

为中微子运动方向的单位矢量,即

$$n^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=1. \tag{1.69b}$$

由定义知,螺旋度 h 等于中微子自旋算符在其运动方向上投影的 2 倍,显然

$$h^2=(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2\xlongequal{(1.44)\text{式}}\boldsymbol{n}^2=1, \tag{1.70}$$

故 h 的本征值为±1. 在实际应用中,人们通常将(1.66)与(1.67)式中的 χ 和 ϕ 统一地取成螺旋度 h 的本征态,以 χ_+ 表示 h 的本征值为 +1 的本征态,以 χ_- 表示 h 的本征值为 −1 的本征态,则

$$h\chi_+=\chi_+,\quad h\chi_-=-\chi_-. \tag{1.71}$$

求解以上两式可得χ_+与χ_-,并将它们作为(1.66)与(1.67)两式中的 χ 和 ϕ.下面就来求解它们.

首先,χ_+与χ_-是正交归一的,即

$$\chi_r^\dagger \chi_{r'} = \delta_{rr'} \quad (r, r' = \pm), \tag{1.72}$$

又

$$h = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 = \begin{pmatrix} n_3 & n_1 - \mathrm{i} n_2 \\ n_1 + \mathrm{i} n_2 & -n_3 \end{pmatrix},$$

令

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

则(1.71)第 1 式变为

$$\begin{pmatrix} n_3 - 1 & n_1 - \mathrm{i} n_2 \\ n_1 + \mathrm{i} n_2 & -n_3 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

由此得

$$(n_3 - 1)a + (n_1 - \mathrm{i} n_2)b = 0,$$
$$(n_1 + \mathrm{i} n_2)a - (n_3 + 1)b = 0.$$

由上式第 2 式得

$$b = \frac{n_1 + \mathrm{i} n_2}{n_3 + 1} a,$$

故

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{n_1 + \mathrm{i} n_2}{n_3 + 1} a \end{pmatrix}.$$

将其归一化得

$$\chi_+^\dagger \chi_+ = \begin{pmatrix} a^* & \dfrac{n_1 - \mathrm{i} n_2}{n_3 + 1} a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \dfrac{n_1 + \mathrm{i} n_2}{n_3 + 1} a \end{pmatrix}$$
$$= a^* a \left[1 + \frac{n_1^2 + n_2^2}{(n_3 + 1)^2} \right] = 1,$$

注意到(1.69b)式,上式变为

$$|a|^2 \frac{2}{n_3 + 1} = 1,$$

故

$$|a| = \sqrt{\frac{n_3 + 1}{2}}.$$

取 a 为实数,则

$$a=\sqrt{\frac{n_3+1}{2}},$$

故

$$\chi_+=\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+\mathrm{i}n_2 \end{pmatrix}. \tag{1.73}$$

同样的方法可以确定出

$$\chi_-=\frac{1}{\sqrt{2(n_3+1)}}\begin{pmatrix} -n_1+\mathrm{i}n_2 \\ n_3+1 \end{pmatrix}. \tag{1.74}$$

通常称χ_+为中微子的右旋波函数,在该状态下,粒子的自旋与运动方向平行.称χ_-为中微子的左旋波函数,在该状态下,中微子的自旋与运动方向相反.将(1.73)、(1.74)代入(1.66)与(1.67)两式得中微子旋量波函数

$$\begin{aligned} u(p,r)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r \end{pmatrix} \quad (r=\pm;E_p=|\boldsymbol{p}|,\boldsymbol{p}), \\ v(p,r)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix} \quad (r=\pm;E_p=-|\boldsymbol{p}|,-\boldsymbol{p}). \end{aligned} \tag{1.75}$$

由(1.62b)式知它们满足运动方程

$$\begin{aligned} &\gamma^\mu p_\mu u(p,r)=0, \\ &-\gamma^\mu p_\mu v(p,r)=0. \end{aligned} \tag{1.76}$$

它们是狄拉克方程(1.60)在动量空间中的表示.

1.3.3 中微子旋量波函数的自旋求和

可以证明,中微子旋量波函数满足如下自旋求和公式

$$\begin{aligned} \sum_r u(p,r)\bar{u}(p,r)&=\frac{\gamma\cdot p}{2E}, \\ \sum_r v(p,r)\bar{v}(p,r)&=\frac{\gamma\cdot p}{2E}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

例 1.4 证明自旋求和公式(1.77).

证明

$$\begin{aligned} \sum_r u(p,r)\bar{u}(p,r)&=\sum_r \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \chi_r \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi_r^\dagger & -\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix} \\ &=\frac{1}{2}\sum_r\begin{pmatrix} \chi_r\chi_r^\dagger & -\chi_r\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^\dagger & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
\sum_r \chi_r\chi_r^\dagger &= \chi_+\chi_+^\dagger + \chi_-\chi_-^\dagger \\
&= \frac{1}{2(n_3+1)}\begin{pmatrix} n_3+1 \\ n_1+\mathrm{i}n_2 \end{pmatrix}(n_3+1 \quad n_1-\mathrm{i}n_2) + \frac{1}{2(n_3+1)}\begin{pmatrix} -n_1+\mathrm{i}n_2 \\ n_3+1 \end{pmatrix} \\
&\quad (-n_1-\mathrm{i}n_2 \quad n_3+1) \\
&= \frac{1}{2(n_3+1)}\begin{pmatrix} (n_3+1)^2 & (n_3+1)(n_1-\mathrm{i}n_2) \\ (n_1+\mathrm{i}n_2)(n_3+1) & n_1^2+n_2^2 \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2(n_3+1)}\begin{pmatrix} n_1^2+n_2^2 & -(n_3+1)(n_1-\mathrm{i}n_2) \\ -(n_1+\mathrm{i}n_2)(n_3+1) & (n_3+1)^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2(n_3+1)}\begin{pmatrix} (n_3+1)^2+n_1^2+n_2^2 & 0 \\ 0 & (n_3+1)^2+n_1^2+n_2^2 \end{pmatrix} \\
&\xlongequal{(1.69\text{b})式} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

即

$$\sum_r \chi_r\chi_r^\dagger = I, \tag{1.78}$$

与旋量波函数$\chi_s(s=1,2)$满足同样的关系[参见(1.43)式]. 另注意到(1.70)式,

$$\begin{aligned}
\sum_r u(p,r)\,\bar{u}(p,r) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & -I \end{pmatrix} \xlongequal{(1.18)式} \frac{1}{2}(\beta-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}) \\
&= \frac{1}{2E}(\beta E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}E) \xlongequal{(1.69\text{a})式} \frac{1}{2E}(\beta E-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{p}),
\end{aligned}$$

亦即

$$\sum_r u(p,r)\,\bar{u}(p,r) = \frac{\gamma\cdot p}{2E}, \Rightarrow (1.77)\ 第\ 1\ 式得证.$$

再

$$\begin{aligned}
\sum_r v(p,r)\,\bar{v}(p,r) &= \frac{1}{2}\sum_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r \\ \chi_r \end{pmatrix}(\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \quad -\chi_r^\dagger) \\
&= \frac{1}{2}\sum_r \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^\dagger \\ \chi_r\chi_r^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & -\chi_r\chi_r^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & -I \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\beta-\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{n}) \\
&= \frac{\gamma\cdot p}{2E}, \Rightarrow (1.77)\ 第\ 2\ 式得证.
\end{aligned}$$

1.3.4 中微子旋量波函数的正交归一性

中微子旋量波函数满足正交归一化条件

$$
\begin{aligned}
&u^{\dagger}(p,r)u(p,r')=\delta_{rr'},\\
&v^{\dagger}(p,r)v(p,r')=\delta_{rr'},\\
&u^{\dagger}(p,r)v(E,-\boldsymbol{p},r')=v^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},r)u(p,r')=0,
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

$$
\sum_r[u(p,r)\bar{u}(p,r)-v(p,r)\bar{v}(p,r)]=0,\tag{1.80}
$$

$$
\sum_r[u(p,r)u^{\dagger}(p,r)+v(E,-\boldsymbol{p},r)v^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},r)]=I.\tag{1.81}
$$

例 1.5 证明(1.79)～(1.81)各式的正交归一关系.

证明 这里只给出部分关系的证明,剩余各式读者可自证之.如

$$
u^{\dagger}(p,r)u(p,r')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\chi_r^{\dagger} & \chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{r'}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_{r'}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\chi_r^{\dagger}\chi_{r'}[1+(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})^2],
$$

注意到(1.70)与(1.72)两式,上式变为

$$
u^{\dagger}(p,r)u(p,r')=\delta_{rr'}.
$$

又如

$$
u^{\dagger}(p,r)v(E,-\boldsymbol{p},r')=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\chi_r^{\dagger} & \chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_{r'}\\ \chi_{r'}\end{pmatrix}=0.
$$

再如

$$
\begin{aligned}
&\sum_r[u(p,r)u^{\dagger}(p,r)+v(E,-\boldsymbol{p},r)v^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},r)]\\
&=\frac{1}{2}\sum_r\begin{pmatrix}\chi_r\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_r^{\dagger} & \chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\sum_r\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\\ \chi_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & \chi_r^{\dagger}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\sum_r\begin{pmatrix}\chi_r\chi_r^{\dagger} & \chi_r\chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^{\dagger} & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\sum_r\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_r\chi_r^{\dagger}\\ -\chi_r\chi_r^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & \chi_r\chi_r^{\dagger}\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & I\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} & I\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}=I.
\end{aligned}
$$

同样的方法可证明其他正交归一关系.

1.3.5 旋量波函数的手征性

容易证明,$u(p,r)$和$v(p,r)$也是手征算符γ_5的本征态

$$\begin{aligned}
&\gamma_5 u(p,+) = -u(p,+),\\
&\gamma_5 u(p,-) = u(p,-),\\
&\gamma_5 v(p,+) = -v(p,+),\\
&\gamma_5 v(p,-) = v(p,-).
\end{aligned} \tag{1.82}$$

如

$$\gamma_5 u(p,+) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_+ \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{(1.71)式} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_+ \end{pmatrix},$$

亦即

$$\gamma_5 u(p,+) = -u(p,+).$$

又如

$$\gamma_5 v(p,-) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\chi_- \\ \chi_- \end{pmatrix},$$

亦即

$$\gamma_5 v(p,-) = v(p,-).$$

同理可证明其他两式.

(1.82)四式反映了旋量波函数 $u(p,r)$ 和 $v(p,r)$ 的手征性,对于 $r=+$ 的右旋态,其手征本征值为-1;反之,对于 $r=-$ 的左旋态,手征本征值是$+1$.

综合以上所述,旋量波函数 $u(p,r)$ 和 $v(p,r)$ 是 H、$\boldsymbol{p}$、h、γ_5 的共同本征态,它们的本征值汇于表 1.1.

表 1.1　H、$\boldsymbol{p}$、h、γ_5 在 $u(p,r)$ 和 $v(p,r)$ 中的本征值

	H	$\boldsymbol{p}$	h	γ_5
$u(p,+)$	E	$\boldsymbol{p}$	$+1$	-1
$u(p,-)$	E	$\boldsymbol{p}$	-1	$+1$
$v(p,+)$	$-E$	$-\boldsymbol{p}$	$+1$	-1
$v(p,-)$	$-E$	$-\boldsymbol{p}$	-1	$+1$

由此可见,算符 H、$\boldsymbol{p}$、h、γ_5 构成一力学量完全集,它们之间彼此对易,如

$$[H,\ \boldsymbol{p}] = 0.$$

又如

$$
\begin{aligned}
[H, h] &= [\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{n}] = [\alpha_i p_i, \Sigma_j n_j] = [\alpha_i, \Sigma_j] p_i n_j \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}\right] p_i n_j \\
&= \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i\sigma_j \\ \sigma_i\sigma_j & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j\sigma_i \\ \sigma_j\sigma_i & 0 \end{pmatrix}\right] p_i n_j \\
&= \begin{pmatrix} 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \\ [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \end{pmatrix} p_i n_j \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\ 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \end{pmatrix} p_i n_j \\
&= 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk} p_i n_j \alpha_k = 0.
\end{aligned}
$$

上面最后一步用到了关系

$$
\varepsilon_{ijk} p_i n_j = \varepsilon_{jik} p_j n_i \xlongequal{(1.69\text{a})\text{式}} -\varepsilon_{ijk} p_i n_j = 0.
$$

在上式中，ε_{ijk} 中的 ij 两指标对于交换是反对称的，$p_j n_i = p_j p_i / E_p = p_i p_j / E_p = p_i n_j$ 对于指标 ij 的交换是对称的. 上式表明：含有一对相同指标的对称张量与反对称张量，其积恒为零，这一结论以后要经常用到.

1.3.6 中微子平面波函数

将(1.75)式的旋量波函数 $u(p,r)$ 与 $v(p,r)$ 代入(1.61)式，得到具有一定能量、动量及自旋取向的中微子时空平面波函数

$$
\begin{aligned}
\psi_{pr}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} u(p,r) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} \quad (r=\pm; E, \boldsymbol{p}), \\
\psi_{-pr}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} v(p,r) \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \quad (r=\pm; -E, -\boldsymbol{p}).
\end{aligned}
\tag{1.83}
$$

由(1.60)式知，它们满足狄拉克方程

$$
\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{pr}(x) = 0, \quad \text{或} \quad -\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{-pr}(x) = 0,
\tag{1.84}
$$

且

$$
h\psi_{\pm p,\pm}(x) = \pm \psi_{\pm p,\pm}(x).
\tag{1.85}
$$

(1.83)两式中的 $1/\sqrt{V}$，使得 $\psi_{pr}(x)$ 与 $\psi_{-pr}(x)$ 按如下方式归一化

$$
\begin{aligned}
\int_V \psi_{pr}^\dagger(x) \psi_{pr'}(x) \mathrm{d}^3 x &= \delta_{rr'}, \\
\int_V \psi_{-pr}^\dagger(x) \psi_{-pr'}(x) \mathrm{d}^3 x &= \delta_{rr'},
\end{aligned}
\tag{1.86}
$$

$$\int_V \psi^{\dagger}_{pr}(x)\psi_{-E,\boldsymbol{p}r'}(x)\mathrm{d}^3x = 0,$$
$$\int_V \psi^{\dagger}_{-E,\boldsymbol{p}r}(x)\psi_{pr'}(x)\mathrm{d}^3x = 0, \tag{1.87}$$

$$\sum_r \left[\int_V \psi_{pr}(x)\psi^{\dagger}_{pr}(x)\mathrm{d}^3x + \int \psi_{-E,\boldsymbol{p}r}(x)\psi^{\dagger}_{-E,\boldsymbol{p}r}(x)\mathrm{d}^3x\right] = I. \tag{1.88}$$

其证明是简单的,如

$$\int_V \psi^{\dagger}_{pr}(x)\psi_{pr'}(x)\mathrm{d}^3x = \frac{1}{V}u^{\dagger}(p,r)u(p,r')\int_V \mathrm{d}^3x \overset{(1.79)\text{式}}{=\!=\!=} \delta_{rr'}.$$

结合(1.79)～(1.81)各式,同样的方法可证明其他各正交归一关系.

1.4　麦克斯韦方程组

英国物理学家麦克斯韦(Maxwell)于 1867 年建立起了描述电磁场运动规律的一组方程,后经德国物理学家赫兹(Hertz)的提炼,得到了我们今天所说的麦克斯韦方程组. 1905 年,爱因斯坦(Einstein)创立了狭义相对论,实现了时间与空间、电场与磁场的相统一,成就了麦克斯韦方程组的四维协变形式. 1926 年,量子力学开始问世,这使人们认识到麦克斯韦方程组不但是经典电磁场的场方程,也是光子的相对论波动方程.

1.4.1　麦克斯韦方程组、矢势与标势

由电动力学知,麦克斯韦方程组的一般形式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho,\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0,\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{1.89}$$

其中,$\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别为电场与磁场强度,ρ 为电荷体密度,$\boldsymbol{j}$ 为电流体密度矢量. 由第 3 式,可引入矢势 $\boldsymbol{A}$,使得

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{1.90}$$

将其代入第 2 式得

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right)=0,$$

由该式,可引入标势 ϕ,使得

$$\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=-\nabla\phi, \tag{1.91}$$

将(1.90)与(1.91)两式代入(1.89)式中的第 1 和第 4 式得

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\rho,$$
$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{j}. \tag{1.92}$$

以上两式就是麦克斯韦方程组的势表达式，通过矢势 $\boldsymbol{A}$ 与标势 ϕ 的引入，原麦克斯韦方程组的四个方程减少为两个.

1.4.2　四维势矢量与势方程的协变形式

如前所述，麦克斯韦方程组是光子的相对论波动方程，可以写成四维的协变形式，为此引入四维势矢量

$$A^\mu=(\phi,\boldsymbol{A}),\quad 或\quad A_\mu=(\phi,-\boldsymbol{A}). \tag{1.93}$$

注意到四维时空导数(0.8)～(0.10)式，(1.92)两式可统一地表示成

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=-j^\mu, \tag{1.94a}$$

其中

$$j^\mu=(\rho,\boldsymbol{j}),\quad 或\quad j_\mu=(\rho,-\boldsymbol{j}) \tag{1.94b}$$

为四维电流体密度矢量. 可见，通过四维矢量 A^μ 与 j^μ 的引入，原麦克斯韦方程组的四个方程式被约化成了一个，且是四维协变的，满足相对论中相对性原理的要求.

例 1.6　证明(1.94a)式.

证明

$$\begin{aligned}\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)&=\partial^\mu\partial_\nu A^\nu-\partial_\nu\partial^\nu A^\mu\\&=\partial^\mu\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A^\mu=-j^\mu.\end{aligned} \tag{1.95}$$

当 $\mu=0$ 时，上式变为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\phi=-\rho,$$

亦即

$$\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=-\rho,\ \Rightarrow\ (1.92)第1式得证.$$

当 $\mu=1,2,3$ 时，(1.95)式变为

$$-\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{A}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{j},$$

亦即

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\boldsymbol{j},\ \Rightarrow\ (1.92)第2式得证.$$

1.4.3　电磁场张量

引入二阶四维反对称张量

$$F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu, \tag{1.96}$$

(1.94a)式可改写成更加简洁的形式

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=-j^\mu. \tag{1.97}$$

(1.96)式定义的 $F_{\mu\nu}$ 称为电磁场张量,它的各分量是电场 $\boldsymbol{E}$ 或磁场 $\boldsymbol{B}$,由于 $F_{\mu\nu}$ 对于角标 $\mu\nu$ 是反对称的,即 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$,所以 $F_{\mu\nu}$ 共有 6 个独立分量,正好是 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的 6 个分量,其对应关系为

$$F_{i0}=\partial_i A_0-\partial_0 A_i=\partial_i\phi-\frac{\partial A_i}{\partial t}\xlongequal{(1.91)\text{式}}E_i,$$

$$F_{ij}=\partial_i A_j-\partial_j A_i\xlongequal{(1.90)\text{式}}\varepsilon_{ijk}B_k.$$

这样,通过电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 的引入,电场 $\boldsymbol{E}$ 与磁场 $\boldsymbol{B}$ 被纳入其中,成为 $F_{\mu\nu}$ 的不同分量,从而完成了电与磁的相统一,同时也使麦克斯韦方程组变成了更加简洁的协变形式(1.97)式.

1.4.4　规范变换与规范变换不变性

在电磁理论中,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 被认为是基本的,而矢势 $\boldsymbol{A}$ 与标势 ϕ 是辅助量,由于电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 各分量与 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 各分量相联系,所以电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 是基本的,而按(1.96)式定义 $F_{\mu\nu}$ 的四维势矢量 A_μ 是辅助量.

可以证明,对于一定的电磁场张量 $F_{\mu\nu}$,$A_\mu(x)$ 不是唯一的. 实际上,若作如下变换

$$A_\mu\Rightarrow A'_\mu=A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x), \tag{1.98}$$

其中,$\theta(x)$ 是任意可导的标量函数,在这种变换下,

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu\Rightarrow F'_{\mu\nu}&=\partial_\mu A'_\nu-\partial_\nu A'_\mu\\&=\partial_\mu\left(A_\nu+\frac{1}{e}\partial_\nu\theta\right)-\partial_\nu\left(A_\mu+\frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\\&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=F_{\mu\nu},\end{aligned}$$

即电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 在(1.98)式所示的变换下是不变的,通常称这种变换为规范变换,因此在规范变换下,电磁场张量,亦即电磁场 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 保持不变,所以 $F_{\mu\nu}$ 具有规范变换不变性. 这种规范变换不变性是非常重要的,它使得我们可以自由地选取规范条件(即 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 的形式),以达到简化方程的目的. 常用的规范条件有两种:一是库仑(Coulomb)规范;另一个是洛伦兹(Lorentz)规范.

在库仑规范中,规范条件取为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, \tag{1.99}$$

在该规范下,势方程(1.94a)变为

$$\partial^\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}-\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=-j^\mu. \tag{1.100a}$$

在洛伦兹规范下,规范条件取为

$$\partial^{\mu} A_{\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{1.101}$$

此时势方程(1.94a)变为

$$\partial_{\nu}\partial^{\nu} A^{\mu} = j^{\mu}. \tag{1.102a}$$

1.4.5 自由势方程的平面波解

对于自由电磁场,$j^{\mu}=0$,(1.100a)式中的时间分量变为$\nabla^2\phi=0$,其解为 $\phi=0$,则该方程只剩下空间分量,取形式

$$\partial^{\nu}\partial_{\nu}\boldsymbol{A}=0 \quad (\nabla \cdot \boldsymbol{A}=0). \tag{1.100b}$$

而此时的(1.102a)式变为

$$\partial_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu}=0 \quad (\partial_{\mu}A^{\mu}=0). \tag{1.102b}$$

以上两式都是线性齐次波动方程,有平面波解

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}^{+}(x)=\boldsymbol{A}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}, \quad \boldsymbol{A}^{-}(x)=\boldsymbol{A}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \\ &A_{\mu}^{+}(x)=A_{\mu}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}, \quad A_{\mu}^{-}(x)=A_{\mu}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \end{aligned} \tag{1.103}$$

其中,"+"与"−"号分别代表正频解和负频解.设电磁波的频率为 ω,波矢为 $\boldsymbol{k}$,则四维波矢为

$$k^{\mu}=(\omega,\boldsymbol{k}), \quad k_{\mu}=(\omega,-\boldsymbol{k}). \tag{1.104}$$

将(1.103)代入(1.100b)或(1.102b)式得

$$k^2=0, \Rightarrow \omega^2-|\boldsymbol{k}|^2=0, \Rightarrow E=\pm\omega, \quad \omega=|\boldsymbol{k}|. \tag{1.105}$$

(1.105)式表明,光子也存在负能困难,这一困难也只有在量化后才能得以消除.

将(1.103)式代入规范条件(1.99)与(1.101)得

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}(k)=0, \quad k^{\mu}A_{\mu}(k)=0. \tag{1.106}$$

它们分别是动量空间的势需满足的库仑规范与洛伦兹规范条件.

1.4.6 三维极化矢量

三维空间有三个线性独立的矢量,为了描述该空间光子的极化状态,人们通常取如图 1.1 所示的三个相互正交的单位矢量.

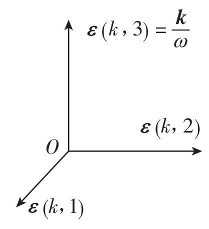


图 1.1 三个相互正交的单位矢量

其中,$\boldsymbol{\varepsilon}(k,3)$与 $\boldsymbol{k}$ 平行,$\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)$,$\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)$与 $\boldsymbol{k}$ 垂直,三者都是三维空间中的单位矢量,且彼此垂直,即满足正交归一化条件

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'}\quad(\lambda,\lambda'=1,2,3). \tag{1.107}$$

在三维空间中,有且仅有三个正交归一的矢量,因此它们还应满足完备性条件

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda)=\delta^{ij}\quad(i,j=1,2,3). \tag{1.108}$$

显然,三个线性独立的单位矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)$ $(\lambda=1,2,3)$,只有两个 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)$ $(\lambda=1,2)$满足库仑规范条件

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)=0\quad(\lambda=1,2). \tag{1.109}$$

通常将这三个单位矢量称为极化矢量,用以描述电磁场或光子的极化状态. 其中 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)(\lambda=1,2)$与 $\boldsymbol{k}$ 方向垂直,称为横极化矢量,$\boldsymbol{\varepsilon}(k,3)$与 $\boldsymbol{k}$ 平行,称为纵极化矢量. (1.109)式表明,库仑规范要求光子只有横向极化. 由(1.108)式知

$$\sum_{\lambda=1}^{2}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda)=\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2}. \tag{1.110}$$

1.4.7　四维极化矢量

四维空间有四个线性独立的矢量,为了描述该空间光子的极化状态,需要定义四个相互垂直的四维极化矢量. 为此引入一个只有时间分量的四维矢量

$$\eta_\mu=(1,\boldsymbol{0}), \tag{1.111}$$

而四维极化矢量取如下形式

$$\begin{aligned}
e^\mu(k,1)&=[0,\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)],\\
e^\mu(k,2)&=[0,\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)],\\
e^\mu(k,3)&=[0,\boldsymbol{\varepsilon}(k,3)]=\frac{k^\mu-\eta^\mu(k\cdot\eta)}{(k\cdot\eta)},\\
e^\mu(k,4)&=\mathrm{i}\eta^\mu=(\mathrm{i},\boldsymbol{0}).
\end{aligned} \tag{1.112}$$

式中

$$\begin{aligned}
e^\mu(k,3)&=\frac{k^\mu-\eta^\mu(k\cdot\eta)}{(k\cdot\eta)}=\frac{k^\mu}{(k\cdot\eta)}-\eta^\mu=\frac{k^\mu}{|\boldsymbol{k}|}-\eta^\mu\\
&=\left(1,\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)-(1,\boldsymbol{0})=\left(0,\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|}\right)=[0,\boldsymbol{\varepsilon}(k,3)].
\end{aligned}$$

容易证明,这四个极化矢量满足正交归一关系

$$e^\mu(k,\lambda)e_\mu(k,\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'}\quad(\lambda,\lambda'=1,2,3,4), \tag{1.113}$$

且是完备的,即满足条件

$$\sum_{\lambda=1}^{4}e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)=-g_{\mu\nu}. \tag{1.114}$$

正交归一关系(1.113)式是显然的,对于(1.114)式

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_0(k,\lambda)e_0(k,\lambda) = e_0(k,4)e_0(k,4) = -1 = -g_{00},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{4} e_i(k,\lambda)e_j(k,\lambda) = \sum_{\lambda=1}^{3} e_i(k,\lambda)e_j(k,\lambda)$$

$$\xlongequal{(1.108)\text{式}} \delta_{ij} = -g_{ij} \quad (i,j=1,2,3),$$

所以完备关系(1.114)式成立.

四个线性独立的单位极化矢量 $e^{\mu}(k,\lambda)(\lambda=1,2,3,4)$,满足洛伦兹条件的,只有 $e^{\mu}(k,\lambda)(\lambda=1,2)$两个,即

$$k_{\mu}e^{\mu}(k,\lambda)=0 \quad (\lambda=1,2), \tag{1.115}$$

这两个极化矢量 $e^{\mu}(k,\lambda)(\lambda=1,2)$称为横极化矢量,$e^{\mu}(k,3)$称为纵极化矢量,$e^{\mu}(k,4)$称为标量极化矢量.

由(1.114)式得

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k,\lambda) = -g^{\mu\nu} - e^{\mu}(k,3)e^{\nu}(k,3) - e^{\mu}(k,4)e^{\nu}(k,4)$$

$$= -g^{\mu\nu} - \frac{[k^{\mu}-\eta^{\mu}(k\cdot\eta)][k^{\nu}-\eta^{\nu}(k\cdot\eta)]}{(k\cdot\eta)^2} + \eta^{\mu}\eta^{\nu},$$

亦即

$$\sum_{\lambda=1}^{2} e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k,\lambda) = -g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu}k^{\nu}}{(k\cdot\eta)^2} + \frac{k^{\mu}\eta^{\nu}+\eta^{\mu}k^{\nu}}{(k\cdot\eta)}. \tag{1.116}$$

1.4.8 光子的平面波函数

上述的极化矢量和平面波因子,加上归一化常数,就得到具有一定能量、动量和极化的光子时空波函数

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{k\lambda}^{\pm}(x) &= \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k\cdot x} \quad (\lambda=1,2,3), \\ A_{k\lambda}^{\mu\pm}(x) &= \frac{\varepsilon^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k\cdot x} \quad (\lambda=1,2,3,4), \end{aligned} \tag{1.117}$$

二者分别是库仑规范与洛伦兹规范下麦克斯韦方程组的解,前者是三维极化空间中的矢量,后者是四维极化空间中的矢量,满足正交、归一及完备条件

$$\begin{aligned} \int_V \boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)\cdot \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 \boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)\mathrm{d}^3x &= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \\ \int_V \boldsymbol{A}_{k\lambda}^{-}(x)\cdot \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 \boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{-*}(x)\mathrm{d}^3x &= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}, \end{aligned} \tag{1.118}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=1}^{3}\int_V A_{k\lambda}^{i+*}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{k'\lambda}^{j+}(x)\,\mathrm{d}^3x=\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{ij},\\&\sum_{\lambda=1}^{3}\int_V A_{k\lambda}^{i-}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{k'\lambda}^{j-*}(x)\,\mathrm{d}^3x=\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{ij},\end{aligned}\tag{1.119}$$

$$\begin{aligned}&\int_V A_{k\lambda}^{\mu+*}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu,k'\lambda'}^{+}(x)\,\mathrm{d}^3x=-\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{\lambda\lambda'},\\&\int_V A_{k\lambda}^{\mu-}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\mu,k'\lambda'}^{-*}(x)\,\mathrm{d}^3x=-\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{\lambda\lambda'},\end{aligned}\tag{1.120}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\lambda=1}^{4}\int_V A_{\mu,k\lambda}^{+*}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\nu,k'\lambda}^{+}(x)\,\mathrm{d}^3x=-\delta_{\boldsymbol{kk}'}g_{\mu\nu},\\&\sum_{\lambda=1}^{4}\int_V A_{\mu,k\lambda}^{-}(x)\,\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A_{\nu,k'\lambda}^{-*}(x)\,\mathrm{d}^3x=-\delta_{\boldsymbol{kk}'}g_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{1.121}$$

利用(1.107)、(1.108)、(1.113)及(1.114)各式,可以容易地证明上述各关系.

例 1.7　证明正交、归一及完备关系(1.118)～(1.121)式.

证明　与前面一样,这里只给出部分关系的证明,其他各关系读者可自证之.如(1.118)第1式的左边

$$\int_V \boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)\cdot\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)\,\mathrm{d}^3x\xlongequal{(1.9)\text{式}}\int_V\left[\boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)\cdot\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)}{\partial t}-\boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)\cdot\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)}{\partial t}\right]\mathrm{d}^3x,$$

由(1.117)式知

$$\boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},\qquad \boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x},$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)}{\partial t}=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\omega'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x},\qquad \mathrm{i}\frac{\partial\boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)}{\partial t}=-\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x},$$

则

$$\begin{aligned}\int_V \boldsymbol{A}_{k\lambda}^{+*}(x)\cdot\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\boldsymbol{A}_{k'\lambda'}^{+}(x)\,\mathrm{d}^3x&=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega+\omega')\int_V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')\cdot x}\mathrm{d}^3x\\&=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega+\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega-\omega')t}\int_V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x,\end{aligned}$$

由周期性边界条件[参见(1.9)式下方的讨论]知

$$\int_V\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x=V\delta_{\boldsymbol{kk}'},$$

再由正交归一条件(1.107)式知

$$\int_V \boldsymbol{A}^{+*}_{k\lambda}(x)\cdot \mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 \boldsymbol{A}^{+}_{k'\lambda'}(x)\mathrm{d}^3x = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\text{，}\Rightarrow (1.118)\text{ 第 1 式得证.}$$

再如(1.121)第 2 式的左边

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\int_V A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)\mathrm{d}^3x = \sum_{\lambda=1}^{4}\int_V \left[A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)\mathrm{i}\frac{\partial A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)}{\partial t} - A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)\mathrm{i}\frac{\partial A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)}{\partial t}\right]\mathrm{d}^3x\text{，}$$

由(1.117)式知

$$A^{-}_{\mu,k\lambda}(x) = \frac{\varepsilon_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\text{，}\quad A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x) = \frac{\varepsilon_\nu(k',\lambda)}{\sqrt{2V\omega'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}\text{，}$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)}{\partial t} = \frac{\varepsilon_\nu(k',\lambda)}{\sqrt{2V\omega'}}\omega'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x}\text{，}\quad \mathrm{i}\frac{\partial A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)}{\partial t} = -\frac{\varepsilon_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\text{，}$$

则

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\int_V A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)\mathrm{d}^3x = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{4}\varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon_\nu(k',\lambda)}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega+\omega')\int_V \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k-k')\cdot x}\mathrm{d}^3x\text{，}$$

如上面同样的考虑，并注意到完备性条件(1.114)式知

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\int_V A^{-}_{\mu,k\lambda}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 A^{-*}_{\nu,k'\lambda}(x)\mathrm{d}^3x = -g_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}g_{\mu\nu}\text{，}\Rightarrow (1.121)\text{ 第 2 式得证.}$$

第 2 章　拉格朗日场论及场的对称变换与守恒荷

第 1 章讨论了三种不同自旋自由粒子的相对论波动方程及其平面波解，所得平面波是时空坐标的函数，无处不在，无处不有，弥散在整个空间，所以这些平面波实际上是一些不同的场，用于描述粒子的性质与时空运动状态. 不同的粒子对应于不同的场，反之，不同的场都存在着与之相应的场粒子或场量子，场与粒子相比，场是基本的，粒子是场处在激发态的一种表现. 本章将采用理论力学中的拉格朗日（Lagrange）方法，讨论场的运动及其对称变换等问题.

理论力学有三套等价的理论体系：一是由英国物理学家牛顿（Newton）在 1687 年建立的牛顿力学，二是由法国数学与物理学家拉格朗日在 1788 年建立的拉格朗日力学，再就是由英国物理学家哈密顿（Hamilton）在 1834 年建立的哈密顿力学，后两者统称为分析力学. 牛顿力学，由于其公式的简单与物理概念的直观性，广为人们所熟知. 而分析力学，由于其表述的理论化与物理概念的抽象性，初学者理解起来比较困难. 但正是由于这种理论化与抽象性的特点，便于将其推广到其他领域. 例如，这里将采用拉格朗日方法来处理场的问题，由此建立起来的理论称为拉格朗日场论. 第 3 章将采用哈密顿方法对场实现量子化，这种量子化方法叫做正则量子化方法，具体内容下一章将作介绍.

2.1　力学系统的拉格朗日方程

作为过渡，首先对拉格朗日力学的基本内容作一简单的回顾.

在拉格朗日力学中，描写力学系统的基本物理量是拉格朗日函数 $L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$，其中 $q_i(t)$ 与 $\dot{q}_i(t)$ 分别是广义坐标与广义速度，它们都是时间 t 的函数，$i=1, 2, \cdots, n$ 是系统的自由度. 对 $L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]$ 取时间积分得作用量

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L[q_i(t), \dot{q}_i(t)]\,\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

它是广义坐标 $q_i(t)$ 和广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 的泛函.

2.1.1　最小作用量原理

在拉格朗日力学中，力学系统的运动规律，按最小作用量原理进行. 该原理用变分法可表述为：若广义坐标和广义速度作任意变化 $\delta q_i(t)$ 与 $\delta\dot{q}_i(t)$，但在积分限上保

持不变,即

$$\delta q_i(t_1)=\delta q_i(t_2)=0,\quad \delta\dot{q}_i(t_1)=\delta\dot{q}_i(t_2)=0,\tag{2.2}$$

则作用量取极值,即 $\delta A=0$ 时,便是力学系统应遵循的运动规律.

2.1.2 拉格朗日方程

由最小作用量原理,可导出力学系统的运动方程,为此对(2.1)式取变分并取极值得

$$\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}L[q_i(t),\dot{q}_i(t)]\mathrm{d}t=0.$$

由于积分限保持不变,上式变为

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\delta L[q_i(t),\dot{q}_i(t)]\mathrm{d}t=0,$$

$$\Rightarrow\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right]\mathrm{d}t=0.$$

对上式第二部分做分部积分得

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\mathrm{d}t=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i\mathrm{d}t.$$

注意到(2.2)式,上式第一项等于零,故

$$\delta A=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\mathrm{d}t=0.$$

由于 δq_i 是任意的,所以有

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)=0,\tag{2.3}$$

这就是力学系统应遵循的运动方程,称为拉格朗日方程.

由此可见,在拉格朗日力学中,求解问题的关键在于确定系统的拉格朗日函数,有了该函数,力学系统的运动规律就可由拉格朗日方程(2.3)求得.如在经典力学中,对于在势场 $V(q_i)$ 中运动的粒子,其拉格朗日函数为

$$L=T-V,$$

其中

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\dot{q}_i^2,$$

为粒子的动能,代入(2.3)式得

$$m_i\ddot{q}_i=-\frac{\partial V}{\partial q_i}=f_i,$$

这就是我们熟知的牛顿第二定律.

2.2　场的拉格朗日方程

在拉格朗日力学中,描述力学系统的基本量 $q_i(t)$ 与 $\dot{q}_i(t)$ 都只是时间 t 的函数,由它们构成的拉格朗日函数 $L[q_i(t),\dot{q}_i(t)]$ 也只是时间的函数.

描述场的基本量是场量 $\phi_\alpha(x)=\phi_\alpha(t,\boldsymbol{x})$, $\alpha=1,2,\cdots,n$ 是场的不同分量的指标, $\phi_\alpha(x)$ 不仅是时间 t 的函数,也是坐标的函数. 如果将坐标 $\boldsymbol{x}$ 看成是自由度的指标,则场量 $\phi_\alpha(x)=\phi_\alpha(t,\boldsymbol{x})$ 也将只是时间 t 的函数. 按此观点,由于 $\boldsymbol{x}$ 是连续变化的,所以场 $\phi_\alpha(x)$ 有无穷多个自由度,或者说场是一个具有无穷多个自由度的力学系统,其中 $\phi_\alpha(x)=\phi_\alpha(t,\boldsymbol{x})$ 是以 $\boldsymbol{x}$ 标志自由度的广义坐标, $\dot{\phi}_\alpha(t,\boldsymbol{x})$ 是广义速度. 这种论述,意在从力学的角度来阐述 $\phi_\alpha(x)$ 的意义,而从相对论的观点来看,时间 t 和空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 是等同的,是同一个四维时空矢量的不同分量,所以我们将 $\phi_\alpha(x)$ 称为广义坐标, $\partial_\mu\phi_\alpha(x)$ 称为广义速度.

在力学中,用 $q_i(t)$, $\dot{q}_i(t)$ 构成拉格朗日函数 $L[q_i(t),\dot{q}_i(t)]$,基于上述原因,在场论里,用 $\phi_\alpha(x)$, $\partial_\mu\phi_\alpha(x)$ 可构成函数 $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\phi_\alpha,\partial_\mu\phi_\alpha)$,它不仅是时间的函数也是空间坐标的函数,称为拉格朗日密度, $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\phi_\alpha,\partial_\mu\phi_\alpha)$ 对空间的积分就是拉格朗日函数

$$L=\int_V\boldsymbol{\mathcal{L}}(\phi_\alpha,\partial_\mu\phi_\alpha)\mathrm{d}^3x, \tag{2.4}$$

再对其作时间积分就得场的作用量

$$A=\int L\mathrm{d}t=\int_\Omega\boldsymbol{\mathcal{L}}(\phi_\alpha,\partial_\mu\phi_\alpha)\mathrm{d}^4x, \tag{2.5}$$

其中, Ω 是四维时空体积.

2.2.1　场的最小作用量原理

力学中的最小作用量原理推广到场的情况就是:若场量及其导数作任意变化 $\delta\phi_\alpha(x)$, $\delta\partial_\mu\phi_\alpha(x)$,但在 Ω 的边界面 Σ_Ω 上保持不变,即

$$\delta\phi_\alpha(x)\big|_{\Sigma_\Omega}=0,\quad \delta\partial_\mu\phi_\alpha(x)\big|_{\Sigma_\Omega}=0, \tag{2.6}$$

则作用量取极值,即 $\delta A=0$ 时,便是场应遵循的运动规律.

2.2.2　场的拉格朗日方程

由场的最小作用量原理,可导出场的运动方程.

由于

$$\delta A=\int_\Omega\delta\boldsymbol{\mathcal{L}}\mathrm{d}^4x=\int_\Omega\left(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\partial_\mu\phi_\alpha\right)\mathrm{d}^4x=0, \tag{2.7}$$

其中

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \partial_{\mu} \delta \phi_{\alpha} \mathrm{d}^4 x = \int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha} \right) \mathrm{d}^4 x - \int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \right) \delta \phi_{\alpha} \mathrm{d}^4 x,$$

由散度定理

$$\int_{\Omega} \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha} \right) \mathrm{d}^4 x = \oiint_{\Sigma_{\Omega}} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha} \mathrm{d} \Sigma_{\mu} \xlongequal{(2.6)\text{式}} 0,$$

这样(2.7)式变为

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \right) \delta \phi_{\alpha} \mathrm{d}^4 x = 0,$$

由于 $\delta\phi_\alpha$ 是任意的，所以有

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \partial_{\mu} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} = 0, \tag{2.8}$$

这就是场的拉格朗日方程，决定着场的运动规律.

2.2.3　场的拉格朗日密度

(2.8)式表明，在拉格朗日场论中，建立场方程的关键在于求得场的拉格朗日密度$\mathscr{L}$，只要知道了$\mathscr{L}$就可通过(2.8)式求得场的运动方程. 反之，如果知道了场的运动方程，与(2.8)式相比较，就可以推知场的拉格朗日密度.

在第 1 章，曾得到自由场的克莱因-戈尔登方程、狄拉克方程及麦克斯韦方程组的相对论协变形式，它们分别为

$$\begin{aligned} &(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + m^2)\phi = 0, \\ &(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0, \\ &\partial^{\nu}\partial_{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu} A^{\nu} = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

将它们与(2.8)式相比较知，与这三种自由场相应的拉格朗日密度分别为

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}_{\phi} = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (\text{实际量场}), \\ &\mathscr{L}_{\phi^*} = \partial_{\mu}\phi^*\partial^{\mu}\phi - m^2\phi^*\phi \quad (\text{复标量场}), \\ &\mathscr{L}_{\psi} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi, \\ &\mathscr{L}_{A} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

克莱因-戈尔登场有实标量场与复标量场之分，由后面 2.8 节的讨论知：实标量场，即 $\phi^* = \phi$ 是无荷的中性粒子的场，如 π^0 与 η 等标量粒子，它们的电荷、奇异数、重子数等荷全为零，是典型的中性标量粒子. 复标量场，即 $\phi^* \neq \phi$ 是有荷粒子的场，如 $\pi^{\pm}$、K^0 与 $\bar{K}^0$ 等标量粒子.

例 2.1　证明(2.10)式.

证明　将(2.10)代入(2.8)式,得(2.9)式,就可以证明它们是正确的.

对于复标量场

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^*}}{\partial \phi^*}=-m^2\phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^*}}{\partial \partial_\mu \phi^*}=\partial^\mu \phi,$$

代入(2.8)得(2.9)第 1 式. 又

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^*}}{\partial \phi}=-m^2\phi^*, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\phi^*}}{\partial \partial_\mu \phi}=\partial^\mu \phi^*,$$

代入(2.8)得(2.9)第 1 式的复共轭.

对于狄拉克场

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \bar{\psi}}=(\mathrm{i}\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \partial_\mu \bar{\psi}}=0,$$

代入(2.8)得(2.9)第 2 式. 又

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \psi}=-m\bar{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{\psi}}{\partial \partial_\mu \psi}=\mathrm{i}\gamma^\mu \bar{\psi},$$

代入(2.8)得(2.9)第 2 式的共轭方程(1.23).

对于电磁场

$$\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial A_\lambda}=0,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_\rho A_\lambda}&=-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \partial_\rho A_\lambda}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)\right](\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\\&=-\frac{1}{2}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\lambda\nu}-\delta_{\rho\nu}\delta_{\lambda\mu})(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)\\&=-(\partial^\rho A^\lambda-\partial^\lambda A^\rho),\end{aligned}$$

代入(2.8)得(2.9)第 3 式.

2.3　对称性、不变性、守恒定律与 Noether 定理

对称性具有不可区分性或不变性的意义. 例如,具有球对称性的物体,球面上的点是不可区分的,在空间的转动下是不变的,因此可以用不变性来描述对称性. 对称性首先源于人们对所生活的三维空间的认识,现在这一概念已被推广到四维时空和 n 维的抽象空间. 研究表明:对称性、不变性和守恒定律常常三位一体,因此有如下定理.

Noether 定理　对于可用连续变换不变性来描述的对称性,总有一条守恒定律和它相联系.

该定理是由德国数学与物理学家 Noether 于 1918 年提出并证明的,所以称为 Noether 定理. 该定理指出了对称性、不变性及守恒定律三者之间的相互依存关系

$$\text{对称性} \Leftrightarrow \text{不变性} \Leftrightarrow \text{守恒定律}.$$

例如,时空空间是均匀且各向同性的,于是有时空平移变换与洛伦兹变换不变性,相应的有能量-动量守恒及角动量守恒.本节将从 Noether 定理出发,对场在时空坐标变换下的对称性与守恒定律问题作一讨论.

2.3.1 时空坐标变换

设时空坐标作变换

$$x^{\mu} \Rightarrow x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}, \tag{2.11}$$

其中,δx^{μ}为时空无穷小量,与此相应,场量 $\phi_{\alpha}(x)$也要发生变化

$$\phi_{\alpha}(x) \Rightarrow \phi'_{\alpha}(x') = \phi_{\alpha}(x) + S_{\alpha\beta}\phi^{\beta}(x), \tag{2.12}$$

其中,$S_{\alpha\beta}$是一与 δx^{μ} 成正比的无穷小量,且与场的性质有关.

由 $\phi_{\alpha}(x)$变成 $\phi'_{\alpha}(x')$包含两重变换:一是由场的性质确定的变换

$$\phi_{\alpha}(x) \Rightarrow \phi'_{\alpha}(x), \Rightarrow \text{本征变换},$$

另一是由时空坐标变化引起的变换

$$\phi_{\alpha}(x) \Rightarrow \phi_{\alpha}(x'), \Rightarrow \text{变数变换}.$$

对于本征变换,其变化为

$$\delta\phi_{\alpha}(x) = \phi'_{\alpha}(x) - \phi_{\alpha}(x),$$

由(2.11)与(2.12)两式知

$$\begin{aligned}\phi'_{\alpha}(x) &= \phi_{\alpha}(x-\delta x) + S_{\alpha\beta}\phi^{\beta}(x-\delta x)\\ &= \phi_{\alpha}(x) - \delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x) + S_{\alpha\beta}\phi^{\beta}(x) + O(\delta x_{\mu}^{2}).\end{aligned}$$

这样,在保留一级小量的情况下

$$\delta\phi_{\alpha} = -\delta x^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x) + S_{\alpha\beta}\phi^{\beta}(x). \tag{2.13}$$

在时空坐标和场量的变换下,拉格朗日密度以及作用量也要发生变化

$$\mathcal{L}[\phi_{\alpha}(x), \partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)] \Rightarrow \mathcal{L}'[\phi'_{\alpha}(x'), \partial'_{\mu}\phi'_{\alpha}(x')], \tag{2.14}$$

$$A = \int_{\Omega}\mathcal{L}[\phi_{\alpha}(x), \partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)]\mathrm{d}^{4}x \Rightarrow A' = \int_{\Omega'}\mathcal{L}'[\phi'_{\alpha}(x'), \partial'_{\mu}\phi'_{\alpha}(x')]\mathrm{d}^{4}x'. \tag{2.15}$$

2.3.2 拉格朗日密度的不变性

在上述变换下,如果作用量不变,即

$$A' = A,$$

或

$$\int_{\Omega'}\mathcal{L}'[\phi'_{\alpha}(x'), \partial'_{\mu}\phi'_{\alpha}(x')]\mathrm{d}^{4}x' = \int_{\Omega}\mathcal{L}[\phi_{\alpha}(x), \partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x)]\mathrm{d}^{4}x, \tag{2.16}$$

则我们说,该理论具有这种变换下的不变性,或者说该理论具有这种变换下的对称性.作用量不变,由它导出的运动方程就不变,这意味着在这种变换下,物理规律不变,物理规律具有这种变换下的对称性.

若时空坐标变换的雅可比行列式

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|=1,\ \Rightarrow\ \mathrm{d}^4x'=\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}^4x=\mathrm{d}^4x,$$

则(2.16)式变为

$$\int_\Omega \mathcal{L}'[\phi'_\alpha(x'),\partial'_\mu\phi'_\alpha(x')]\mathrm{d}^4x=\int_\Omega \mathcal{L}[\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x)]\mathrm{d}^4x. \tag{2.17}$$

由相对性原理知,拉格朗日密度的函数形式应是不变的,即

$$\mathcal{L}'[\phi'_\alpha(x'),\partial'_\mu\phi'_\alpha(x')]=\mathcal{L}[\phi'_\alpha(x'),\partial'_\mu\phi'_\alpha(x')],$$

这样由(2.17)式可推知

$$\mathcal{L}[\phi'_\alpha(x'),\partial'_\mu\phi'_\alpha(x')]=\mathcal{L}[\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x)]. \tag{2.18}$$

它与作用量不变式(2.16)等价,由此可见,在一定变换下,理论的对称性或不变性,可用拉格朗日密度的不变性来描述.

2.3.3　连续性方程、守恒流与守恒荷

由 Noether 定理知,若在上述变换下,理论是不变的或对称的,则应存在相应的守恒定律,而守恒定律通常与连续性方程相联系,下面来导出与上述变换不变性相联系的连续性方程.

由(2.11)与(2.18)式得

$$\mathcal{L}[\phi'_\alpha(x),\partial_\mu\phi'_\alpha(x)]-\mathcal{L}[\phi_\alpha(x-\delta x),\partial_\mu\phi_\alpha(x-\delta x)]=0,$$

或

$$\underbrace{\mathcal{L}[\phi'_\alpha(x),\partial_\mu\phi'_\alpha(x)]-\mathcal{L}[\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x)]}_{(1)}$$
$$+\underbrace{\mathcal{L}[\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x)]-\mathcal{L}[\phi_\alpha(x-\delta x),\partial_\mu\phi_\alpha(x-\delta x)]}_{(2)}=0, \tag{2.19}$$

其中

$$(1)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\partial_\mu\phi_\alpha,$$

是由本征变换引起的拉格朗日密度的变化,

$$(2)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x^\mu,$$

是由变数变换引起的拉格朗日密度的变化.将二者代入其中得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\partial_\mu\phi_\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu}\delta x^\mu=0,$$

又由拉格朗日方程(2.8),上式变为

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\mathcal{L}\delta x^\mu\right)=0,$$

记

$$j^{\mu}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha}+\mathscr{L} \delta x^{\mu}, \tag{2.20}$$

上式变为

$$\partial_{\mu} j^{\mu}=0, \tag{2.21}$$

这就是在时空坐标变换下,理论不变时所对应的连续性方程.(2.20)式是相应的守恒流,守恒荷为

$$Q=\int j^{0} \mathrm{d}^{3} x, \quad \frac{\mathrm{d} Q}{\mathrm{d} t}=0. \tag{2.22}$$

其中

$$j^{0}=\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha}+\mathscr{L} \delta t, \tag{2.23}$$

是守恒流的时间分量.对于一定的 $\mathscr{L}$,不同的时空对称变换,δx^{μ} 与 $\delta \phi_{\alpha}(x)$有不同的形式,相应的守恒定律、守恒流和守恒荷亦有不同的形式.相反,对于一定的时空对称变换,δx^{μ} 与 $\delta \phi_{\alpha}(x)$的形式一定,但对于不同的拉格朗日密度 $\mathscr{L}$,守恒流与守恒荷将有不同的形式.

2.4　时空的均匀性与场的能量和动量

时空是均匀的,也就是说,物理规律与发生在时空的具体位置无关.时空的均匀性,可用时空平移不变性来描述,与之相应有能量守恒定律和动量守恒定律,这一结论在量子力学中已学过.本节将在 2.3 节所得结果的基础上,讨论时空均匀性与相对论场的能量和动量的守恒问题,给出场的能量和动量的表达式.

2.4.1　时空平移变换

时空平移变换定义为

$$x^{\mu} \Rightarrow x^{\prime \mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu}, \tag{2.24a}$$

与(2.11)式相比较知,此时的

$$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{\mu}, \tag{2.24b}$$

ε^{μ}是一与时空坐标无关的四维无穷小量.由于时空是均匀的,所以在时空平移(2.24)式的变换下,拉格朗日密度不变,即有(2.18)式成立.

由于在时空平移变换下

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu}=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Rightarrow \partial_{\mu}^{\prime}=\frac{\partial}{\partial x^{\prime \mu}} &=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\prime \mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\frac{\partial}{\partial x^{\prime \mu}}\left(x^{\prime \nu}-\varepsilon^{\nu}\right) \partial_{\nu} \\
&=\delta_{\mu \nu} \partial_{\nu}=\partial_{\mu},
\end{aligned}$$

即时空导数保持不变，这样(2.18)式变为

$$\mathscr{L}[\phi'_\alpha(x'),\partial_\mu\phi'_\alpha(x')]=\mathscr{L}[\phi_\alpha(x),\partial_\mu\phi_\alpha(x)], \tag{2.25}$$

这意味着在时空平移变换下，场量 $\phi_\alpha(x)$ 的变换为

$$\phi_\alpha(x) \Rightarrow \phi'_\alpha(x')=\phi_\alpha(x) \tag{2.26}$$

$$\Rightarrow \phi'_\alpha(x)=\phi_\alpha(x-\delta x)=\phi_\alpha(x)-\delta x^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x)$$

$$\Rightarrow \delta\phi_\alpha(x)=\phi'_\alpha(x)-\phi_\alpha(x)=-\delta x^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x)=-\varepsilon^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x). \tag{2.27}$$

2.4.2　场的能量-动量张量

如(2.25)或(2.26)式所示，时空平移变换是对称变换，所以按照 Noether 定理，应有相应的守恒流与守恒荷，将(2.24)与(2.27)两式代入(2.20)式得守恒流

$$\begin{aligned} j^\mu(x)&=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha(x)}(-\varepsilon^\nu\partial_\nu\phi_\alpha)+\mathscr{L}\varepsilon^\mu \\ &=-\varepsilon_\nu\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha(x)}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathscr{L}\right], \end{aligned}$$

去掉任意因子 ε_ν，得守恒的张量

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathscr{L},\quad \partial_\mu T^{\mu\nu}=0, \tag{2.28}$$

称为场的能量-动量张量.

2.4.3　场的能量与动量

按照(2.22)式，时空平移变换下场的守恒荷为

$$p^\nu=\int T^{0\nu}\mathrm{d}^3x,\quad \dot{p}^\nu=0, \tag{2.29}$$

将(2.28)式代入，得守恒的能量为

$$H=p^0=\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\dot{\phi}_\alpha-\mathscr{L}\right)\mathrm{d}^3x, \tag{2.30}$$

守恒的动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\boldsymbol{\nabla}\phi_\alpha\mathrm{d}^3x. \tag{2.31}$$

对于不同的场，$\mathscr{L}$有不同的形式，将它们代入(2.30)与(2.31)式，就可以得到该场的能量和动量.

1. 克莱因-戈尔登场

克莱因-戈尔登场分为实标量场与复标量场. 对于实标量场

$$\mathscr{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2,\ \Rightarrow\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial\partial_\mu\phi}=\partial^\mu\phi,\quad\frac{\partial\mathscr{L}_\phi}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi},$$

将其代入(2.28)式,得场的能量-动量张量

$$T^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi-m^{2}\phi^{2}). \tag{2.32}$$

代入(2.30)式,得场的能量

$$H=\frac{1}{2}\int[\dot{\phi}^{2}+(\nabla\phi)^{2}+m^{2}\phi^{2}]\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.33}$$

代入(2.31)式,得场的动量

$$\boldsymbol{p}=-\int\dot{\phi}\,\nabla\phi\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.34}$$

对于复标量场

$$\mathcal{L}_{\phi^{*}}=\partial_{\mu}\phi^{*}\partial^{\mu}\phi-m^{2}\phi^{*}\phi,$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\partial_{\mu}\phi^{*}}=\partial^{\mu}\phi,\quad\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\partial_{\mu}\phi}=\partial^{\mu}\phi^{*},\quad\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}^{*}}=\dot{\phi},\quad\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^{*},$$

这时场的能量-动量张量为

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\partial_{\mu}\phi}\partial^{\nu}\phi+\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\partial_{\mu}\phi^{*}}\partial^{\nu}\phi^{*}-g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\phi^{*}},$$

亦即

$$T^{\mu\nu}=\partial^{\mu}\phi^{*}\partial^{\nu}\phi+\partial^{\mu}\phi\partial^{\nu}\phi^{*}-g^{\mu\nu}(\partial_{\alpha}\phi^{*}\partial^{\alpha}\phi-m^{2}\phi^{*}\phi). \tag{2.35}$$

场的能量为

$$H=\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi}+\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}^{*}}\dot{\phi}^{*}-\mathcal{L}_{\phi^{*}}\right)\mathrm{d}^{3}x,$$

亦即

$$H=\int(\dot{\phi}^{*}\dot{\phi}+\nabla\phi^{*}\cdot\nabla\phi+m^{2}\phi^{*}\phi)\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.36}$$

动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}}\nabla\phi+\frac{\partial\mathcal{L}_{\phi^{*}}}{\partial\dot{\phi}^{*}}\nabla\phi^{*}\right)\mathrm{d}^{3}x,$$

亦即

$$\boldsymbol{p}=-\int(\dot{\phi}^{*}\nabla\phi+\dot{\phi}\nabla\phi^{*})\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.37}$$

2.狄拉克场

对于狄拉克场

$$\mathcal{L}_{\psi}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi,\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{L}_{\psi}}{\partial\partial_{\mu}\psi}=\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^{\mu},\quad\frac{\partial\mathcal{L}_{\psi}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^{\dagger},$$

则狄拉克场的能量-动量张量为

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}_{\psi}}{\partial\partial_{\mu}\psi}\partial^{\nu}\psi-g^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\psi},$$

亦即

$$T^{\mu\nu}=\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial^{\nu}\psi-g^{\mu\nu}\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\lambda}\partial_{\lambda}-m)\psi. \tag{2.38}$$

能量为

$$\begin{aligned}H&=\int\left(\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\psi}}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi}-\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\psi}\right)\mathrm{d}^{3}x\\&=\int[\mathrm{i}\psi^{\dagger}\dot{\psi}-\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi]\mathrm{d}^{3}x,\end{aligned}$$

亦即

$$H=\int\psi^{\dagger}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.39}$$

动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\psi}}{\partial\dot{\psi}}\boldsymbol{\nabla}\psi\mathrm{d}^{3}x,$$

亦即

$$\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\int\psi^{\dagger}\boldsymbol{\nabla}\psi\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.40}$$

3. 库仑规范下的电磁场

在库仑规范下，$A_0=0$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\partial_iA^i=0$，则电磁场的拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{A}&=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})\\&=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}+\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\nu}A^{\mu},\end{aligned} \tag{2.41}$$

亦即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{L}}_{A}=&-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{k}\partial^{i}A^{k}-\frac{1}{2}\partial_{0}A_{i}\partial^{0}A^{i}-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{0}\partial^{i}A^{0}-\frac{1}{2}\partial_{0}A_{0}\partial^{0}A^{0}\\&+\frac{1}{2}\partial_{i}A_{k}\partial^{k}A^{i}+\frac{1}{2}\partial_{0}A_{i}\partial^{i}A^{0}+\frac{1}{2}\partial_{i}A_{0}\partial^{0}A^{i}+\frac{1}{2}\partial_{0}A_{0}\partial^{0}A^{0}\\\xlongequal{A_0=0}&-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{k}\partial^{i}A^{k}-\frac{1}{2}\partial_{0}A_{i}\partial^{0}A^{i}+\frac{1}{2}\underline{\partial_{i}A_{k}\partial^{k}A^{i}}.\end{aligned}$$

其中的下划线项$=\partial_i(A_k\partial^kA^i)-A_k\partial^k\partial_iA^i\xlongequal{\partial_iA^i=0}\partial_i(A_k\partial^kA^i)$，

而

$$\int_V\partial_i(A_k\partial^kA^i)\mathrm{d}^3x=\int_V\boldsymbol{\nabla}\cdot(A_k\partial^k\boldsymbol{A})\mathrm{d}^3x=\oiint_{S_V}A_k\partial^k\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\xlongequal{\text{全空间}}0,$$

所以

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{A}=-\frac{1}{2}\partial_{i}A_{k}\partial^{i}A^{k}-\frac{1}{2}\dot{A}_{i}\dot{A}^{i} \tag{2.42}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_i A_k} = -\partial^i A^k, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \dot{A}_i} = -\dot{A}^i,$$

则库仑规范下电磁场的能量-动量张量为

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \partial_i A_k} \partial^j A_k - g^{ij} \mathcal{L}_A \\ &= -\partial^i A^k \partial^j A_k + \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_m A_n \partial^m A^n + \dot{A}_n \dot{A}^n) \\ &= \partial^i \mathbf{A} \cdot \partial^j \mathbf{A} - \frac{1}{2} g^{ij} (\nabla A_n \cdot \nabla A^n + \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}}), \end{aligned}$$

亦即

$$T^{ij} = \partial^i \mathbf{A} \cdot \partial^j \mathbf{A} + \frac{1}{2} g^{ij} (\nabla A^n \cdot \nabla A^n - \dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}}). \tag{2.43}$$

能量为

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \dot{A}_i} \dot{A}_i - \mathcal{L}_A \right) d^3 x \\ &= \int \left(-\dot{A}_i \dot{A}^i + \frac{1}{2} \partial_i A_j \partial^i A^j + \frac{1}{2} \dot{A}_i \dot{A}^i \right) d^3 x \\ &= \frac{1}{2} \int (-\dot{A}_i \dot{A}^i + \partial_i A_j \partial^i A^j) d^3 x \\ &= \frac{1}{2} \int (\dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} - \nabla A_j \cdot \nabla A^j) d^3 x, \end{aligned}$$

亦即

$$H = \frac{1}{2} \int (\dot{\mathbf{A}} \cdot \dot{\mathbf{A}} + \nabla A^i \cdot \nabla A^i) d^3 x. \tag{2.44}$$

动量为

$$\boldsymbol{p} = -\int \frac{\partial \mathcal{L}_A}{\partial \dot{A}_i} \nabla A_i d^3 x = -\int (-\dot{A}^i) \nabla A_i d^3 x,$$

亦即

$$\boldsymbol{p} = -\int \dot{A}^i \nabla A^i d^3 x. \tag{2.45}$$

4.洛伦兹规范下的电磁场

在洛伦兹规范下，$\partial_\mu A^\mu = 0$，电磁场拉格朗日密度(2.41)中的

$$\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) - A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu),$$

又

$$\int_\Omega \partial_\mu (A_\nu \partial^\nu A^\mu) d^4 x = \oiint_{\Sigma_\Omega} A_\nu \partial^\nu A^\mu d\Sigma_\mu \xlongequal{\text{全空间}} 0.$$

则由(2.41)式知,洛伦兹规范下电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\alpha \partial^\mu A^\alpha \tag{2.46}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \partial_\mu A_\alpha} = -\partial^\mu A^\alpha, \quad \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \dot{A}_\alpha} = -\dot{A}^\alpha.$$

这样,洛伦兹规范下电磁场的能量-动量张量为

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \partial_\mu A_\alpha}\partial^\nu A_\alpha - g^{\mu\nu}\mathscr{L}_A,$$

亦即

$$T^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\alpha \partial^\nu A_\alpha + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\beta A_\alpha \partial^\beta A^\alpha. \tag{2.47}$$

能量为

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \dot{A}_\alpha}\dot{A}_\alpha - \mathscr{L}_A\right) \mathrm{d}^3 x \\ &= \int \left(-\dot{A}^\alpha \dot{A}_\alpha + \frac{1}{2}\partial_\mu A_\alpha \partial^\mu A^\alpha\right) \mathrm{d}^3 x \\ &= \int \left(-\dot{A}^\alpha \dot{A}_\alpha + \frac{1}{2}\dot{A}^\alpha \dot{A}_\alpha - \frac{1}{2}\nabla A^\alpha \cdot \nabla A_\alpha\right) \mathrm{d}^3 x, \end{aligned}$$

亦即

$$H = -\frac{1}{2}\int (\dot{A}^\mu \dot{A}_\mu + \nabla A^\mu \cdot \nabla A_\mu)\,\mathrm{d}^3 x. \tag{2.48}$$

动量为

$$\boldsymbol{p} = -\int \frac{\partial \mathscr{L}_A}{\partial \dot{A}_\alpha}\nabla A_\alpha \mathrm{d}^3 x = -\int (-\dot{A}^\alpha)\nabla A_\alpha \mathrm{d}^3 x,$$

亦即

$$\boldsymbol{p} = \int \dot{A}^\mu \nabla A_\mu \mathrm{d}^3 x. \tag{2.49}$$

2.5　时空的各向同性与场的自旋角动量

时空不仅是均匀的,也是各向同性的,即沿时空任何方向的物理规律都是相同的.时空的各向同性,用四维时空的转动不变性来描述,而四维时空的转动用洛伦兹变换来描述,所以时空的各向同性,用洛伦兹变换下的不变性来描述.

2.5.1　洛伦兹变换

时空的洛伦兹变换是线性变换

$$x^\mu \Rightarrow x'^\mu = a^{\mu\nu}x_\nu, \tag{2.50}$$

满足条件

$$x'^{\mu}x'_{\mu}=x^{\nu}x_{\nu}, \tag{2.51}$$

即保持时空两点间的距离不变.其中,$a^{\mu\nu}$是与时空坐标无关的变换系数.将(2.50)代入(2.51)式得

$$x'^{\mu}x'_{\mu}=a^{\mu\nu}x_{\nu}a_{\mu\lambda}x^{\lambda}=a^{\mu\nu}a_{\mu\lambda}x_{\nu}x^{\lambda},$$

表明

$$a^{\mu\nu}a_{\mu\lambda}=g^{\nu}_{\lambda}=\delta_{\nu\lambda}, \tag{2.52}$$

这是洛伦兹变换系数需满足的条件.

在洛伦兹变换下,场量 $\phi_{\alpha}(x)$也要作相应的线性变换,即

$$\phi_{\alpha}(x)\Rightarrow\phi'_{\alpha}(x')=\Lambda_{\alpha\beta}(a)\phi^{\beta}(x), \tag{2.53}$$

其中,$\Lambda_{\alpha\beta}(a)$是场量的变换系数,它不仅与时空变换系数 $a_{\mu\nu}$ 有关,也和场的性质有关.

2.5.2　无穷小洛伦兹变换

无穷小洛伦兹变换定义为

$$a^{\mu\nu}=g^{\mu\nu}+\varepsilon^{\mu\nu}, \tag{2.54}$$

其中,$\varepsilon^{\mu\nu}$是无穷小量,将其代入(2.52)式得

$$(g^{\mu\nu}+\varepsilon^{\mu\nu})(g_{\mu\lambda}+\varepsilon_{\mu\lambda})=g^{\nu}_{\lambda},$$

展开上式并保留至一级小量得

$$g^{\nu}_{\lambda}+g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\lambda}+g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}=g^{\nu}_{\lambda},$$

即

$$g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\lambda}+g_{\mu\lambda}\varepsilon^{\mu\nu}=0,\ \Rightarrow\ \varepsilon^{\nu}{}_{\lambda}+\varepsilon_{\lambda}{}^{\nu}=0,$$

两边同乘以 $g^{\mu\lambda}$得

$$\varepsilon^{\nu\mu}+\varepsilon^{\mu\nu}=0,$$

亦即

$$\varepsilon^{\mu\nu}=-\varepsilon^{\nu\mu}. \tag{2.55}$$

所以无穷小量 $\varepsilon^{\mu\nu}$是一反对称张量,共有 6 个独立分量,且都是实数,因为在 Bjorken - Drell 度规下,各坐标分量都是实数.

将(2.54)代入(2.50)式得无穷小洛伦兹变换下的时空变换

$$x^{\mu}\Rightarrow x'^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu}, \tag{2.56}$$

与(2.11)式相比较知,此时的

$$\delta x^{\mu}=\varepsilon^{\mu\nu}x_{\nu}. \tag{2.57}$$

在无穷小洛伦兹变换下,场量的变化也是无穷小量,为此假设场量的变换系数为

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\varepsilon)=g_{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}, \tag{2.58}$$

由后面的讨论可知,引入的变换系数 $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$是场的自旋角动量算符,由于 $\varepsilon^{\mu\nu}$是一反对称张量,所以 $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$对于角标 μ、ν 的交换应是反对称的.将(2.58)代入(2.53)式得

$$\begin{aligned}\phi'_\alpha(x)&=\left(g_{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right)\phi^\beta(x-\delta x)\\&=\left(g_{\alpha\beta}+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right)[\phi^\beta(x)-\delta x^\lambda\partial_\lambda\phi^\beta(x)].\end{aligned}$$

展开上式并保留至一级小量得

$$\phi'_\alpha(x)=\phi_\alpha(x)-\delta x^\mu\partial_\mu\phi_\alpha(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi^\beta(x),$$

将(2.57)代入上式,得本征变换所引起的场量变化为

$$\delta\phi_\alpha(x)=\phi'_\alpha(x)-\phi_\alpha(x)=-\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu\phi_\alpha(x)+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\phi^\beta(x),$$

再注意到

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu\partial_\mu=\varepsilon^{\nu\mu}x_\mu\partial_\nu=-\varepsilon^{\mu\nu}x_\mu\partial_\nu,$$

得

$$\delta\phi_\alpha(x)=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu}[(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)g_{\alpha\beta}+\mathrm{i}S_{\mu\nu,\alpha\beta}]\phi^\beta(x).\tag{2.59}$$

2.5.3 守恒流与守恒荷

将(2.57)与(2.59)代入(2.20)式,得守恒流

$$\begin{aligned}j^\mu&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha+\mathcal{L}\delta x^\mu\\&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda}[(x^\nu\partial^\lambda-x^\lambda\partial^\nu)g_{\alpha\beta}+\mathrm{i}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}]\phi^\beta(x)+\mathcal{L}\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu.\end{aligned}$$

又

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu=g^{\mu\lambda}\varepsilon_{\lambda\nu}x^\nu\xlongequal{\lambda\leftrightarrow\nu}g^{\mu\nu}\varepsilon_{\nu\lambda}x^\lambda,$$

故

$$\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\lambda}(g^{\mu\nu}x^\lambda-g^{\mu\lambda}x^\nu),$$

这样

$$j^\mu=\frac{\varepsilon_{\nu\lambda}}{2}\left[x^\nu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\lambda\phi_\alpha-g^{\mu\lambda}\mathcal{L}\right)-x^\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathcal{L}\right)+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi^\beta\right],$$

注意到(2.28)式

$$T^{\mu\nu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\partial^\nu\phi_\alpha-g^{\mu\nu}\mathcal{L},$$

上式变为

$$j^\mu=\frac{\varepsilon_{\nu\lambda}}{2}\left(x^\nu T^{\mu\lambda}-x^\lambda T^{\mu\nu}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi^\beta\right).$$

去掉常数因子 $\varepsilon_{\nu\lambda}/2$,得守恒的张量流

$$M^{\mu,\nu\lambda}=x^{\nu}T^{\mu\lambda}-x^{\lambda}T^{\mu\nu}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi_{\alpha}}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi^{\beta}, \tag{2.60}$$

$$\partial_{\mu}M^{\mu,\nu\lambda}=0. \tag{2.61}$$

守恒荷为

$$J^{\nu\lambda}=\int M^{0,\nu\lambda}\mathrm{d}^3x=\int\left(x^{\nu}T^{0\lambda}-x^{\lambda}T^{0\nu}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_{\alpha}}S^{\nu\lambda}_{\alpha\beta}\phi^{\beta}\right)\mathrm{d}^3x, \tag{2.62}$$

它是场的四维角动量.

2.5.4 场的自旋角动量

当 $\nu,\lambda=1,2,3$ 时,用 i,j 表示之,(2.62)式变为

$$J^{ij}=\int\left(x^{i}T^{0j}-x^{j}T^{0i}+\mathrm{i}\,\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_{\alpha}}S^{ij}_{\alpha\beta}\phi^{\beta}\right)\mathrm{d}^3x, \tag{2.63}$$

该式即为场的三维角动量.

由(2.29)式知,场的动量为

$$p^{i}=\int T^{0i}\mathrm{d}^3x,$$

表明 T^{0i} 为场的动量密度,所以(2.63)式中的

$$L^{ij}=\int(x^{i}T^{0j}-x^{j}T^{0i})\mathrm{d}^3x \tag{2.64}$$

应为场的轨道角动量,而

$$S^{ij}=\mathrm{i}\int\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_{\alpha}}S^{ij}_{\alpha\beta}\phi^{\beta}\mathrm{d}^3x, \tag{2.65}$$

就是场或场粒子的自旋角动量,$S^{ij}_{\alpha\beta}$ 就是其自旋角动量算符.

1. 克莱因-戈尔登场

如前所述,克莱因-戈尔登场有实场与复场之分,其拉格朗日密度由(2.10)式给出,即

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\phi}&=\frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2\quad(\text{实际量场}),\\ \mathscr{L}_{\phi^*}&=\partial_{\mu}\phi^*\partial^{\mu}\phi-m^2\phi^*\phi\quad(\text{复标量场}).\end{aligned} \tag{2.66}$$

在洛伦兹变换下,时空坐标作如(2.50)式的变换,即

$$x'^{\mu}=a^{\mu\nu}x_{\nu},$$

用 $a_{\mu\lambda}$ 乘该式两边得

$$a_{\mu\lambda}x'^{\mu}=a_{\mu\lambda}a^{\mu\nu}x_{\nu}\xlongequal{(2.52)\text{式}}g^{\nu}_{\lambda}x_{\nu},$$

亦即

$$x_\lambda = a_{\mu\lambda} x'^\mu. \tag{2.67}$$

而时空导数将作变换

$$\partial_\mu \Rightarrow \partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\lambda} = a_{\mu\lambda}\frac{\partial}{\partial x_\lambda},$$

或

$$\partial'_\mu = a_{\mu\lambda}\partial^\lambda, \tag{2.68}$$

这样

$$\partial'^\mu \partial'_\mu = a^{\mu\nu}\partial_\nu a_{\mu\lambda}\partial^\lambda \xlongequal{(2.52)\text{式}} g^\nu_\lambda \partial_\nu \partial^\lambda = \partial_\lambda \partial^\lambda. \tag{2.69}$$

这样，在洛伦兹变换下，(2.66)式中的实、复标量场的拉格朗日密度变为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi'(x')\partial^\mu \phi'(x') - \frac{1}{2}m^2\phi'^2(x') \quad (\text{实际量场}), \\ \mathcal{L}_{\phi^*} &= \partial_\mu \phi'^*(x')\partial^\mu \phi'(x') - m^2\phi'^*(x')\phi'(x') \quad (\text{复标量场}). \end{aligned} \tag{2.70}$$

由(2.53)式知，该情况下场量的变换为

$$\phi(x) \Rightarrow \phi'(x') = \Lambda(a)\phi(x),$$

对于无穷小变换，由(2.58)式知

$$\Lambda(\varepsilon) = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu},$$

其中，$S_{\mu\nu}$是场粒子的自旋算符. 由于在洛伦兹变换下，不管是实场还是复场，其拉格朗日密度$\mathcal{L}$保持不变，比较(2.66)与(2.70)两式知，这意味着

$$\phi'(x')\phi'(x') = \phi(x)\phi(x), \Rightarrow \Lambda^2(a)\phi^2(x) = \phi^2(x) \quad (\text{实标量场}),$$

$$\phi'^*(x')\phi'(x') = \phi^*(x)\phi(x), \Rightarrow \phi^*(x)\Lambda^*\Lambda\phi(x) = \phi^*(x)\phi(x) \quad (\text{复标量场}).$$

这样，对于

$$\text{实标量场：}\quad \Lambda^2 = 1, \Rightarrow S_{\mu\nu} = 0, \tag{2.71}$$

$$\text{复标量场：}\quad |\Lambda|^2 = 1, \Rightarrow S_{\mu\nu} = 0, \tag{2.72}$$

表明克莱因-戈尔登场，无论是实的还是复的，其自旋角动量皆为零，所以克莱因-戈尔登场的场粒子其自旋为零. 这样，在洛伦兹变换下

$$\phi(x) \Rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \tag{2.73}$$

$$\phi^*(x) \Rightarrow \phi'^*(x') = \phi^*(x). \tag{2.74}$$

2. 狄拉克场

狄拉克场的拉格朗日密度由(2.10)式给出，即

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi.$$

在洛伦兹变换下，按照(2.53)式，场量将作变换

$$\psi(x) \Rightarrow \psi'(x') = \Lambda(a)\psi(x), \tag{2.75}$$

$\Lambda(a)$是一与$a_{\mu\nu}$有关的 4×4 矩阵，待确定. 共轭波函数$\bar{\psi}(x)$的变换为

$$\bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\gamma_0 = \psi^{\dagger}(x)\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0$$
$$= \bar{\psi}(x)\gamma_0\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0, \tag{2.76}$$

由于拉格朗日密度不变,所以有

$$\bar{\psi}'(x')(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = \bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma_{\nu}\partial^{\nu} - m)\psi(x).$$

将(2.68)、(2.75)与(2.76)三式代入得

$$\bar{\psi}(x)\gamma_0\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0(\mathrm{i}\gamma^{\mu}a_{\mu\nu}\partial^{\nu} - m)\Lambda(a)\psi(x) = \bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma_{\nu}\partial^{\nu} - m)\psi(x).$$

比较等式两边,含 m 项

$$\gamma_0\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0\Lambda(a) = 1, \Rightarrow \gamma_0\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0 = \Lambda^{-1}(a), \tag{2.77}$$

则(2.76)式变为

$$\bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}(a), \tag{2.78}$$

含导数项

$$\gamma_0\Lambda^{\dagger}(a)\gamma_0\gamma^{\mu}a_{\mu\nu}\Lambda(a) = \gamma_{\nu} \Rightarrow \Lambda^{-1}(a)\gamma^{\mu}\Lambda(a)a_{\mu\nu} = \gamma_{\nu},$$

两边同乘 $a^{\lambda\nu}$

$$\Lambda^{-1}(a)\gamma^{\mu}\Lambda(a)a_{\mu\nu}a^{\lambda\nu} = a^{\lambda\nu}\gamma_{\nu}, \xrightarrow{(2.52)\text{式}} \Lambda^{-1}(a)\gamma^{\mu}\Lambda(a) = a^{\mu\nu}\gamma_{\nu}, \tag{2.79}$$

对于无穷小洛伦兹变换,由(2.58)式知

$$\Lambda(\varepsilon) = 1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}, \tag{2.80}$$

其中,$S_{\mu\nu}$是狄拉克场粒子的自旋算符.相对于(2.58)式,上式右边的第二项差了一负号,考虑到(2.58)式的形式仅是一种假设,且 $\varepsilon^{\mu\nu}$是任意无穷小量,这种差异是可行的.将(2.54)与(2.80)式代入(2.77)与(2.79)两式得

$$\gamma_0 S^{\dagger}_{\mu\nu}\gamma_0 = S_{\mu\nu}, \tag{2.81}$$

$$[\gamma^{\alpha}, \varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}] = 2\mathrm{i}\varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_{\beta}. \tag{2.82}$$

可以证明满足这两个方程的 $S_{\mu\nu}$取形式

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]. \tag{2.83}$$

由于 $S_{\mu\nu}$是反对称张量,它共有 6 个 4×4 矩阵,其中

$$S_{0i} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_0, \gamma_i] = \frac{\mathrm{i}}{2}\gamma_0\gamma_i \quad (i=1,2,3),$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_i, \gamma_j] \quad (i,j=1,2,3).$$

注意到(1.13)与(1.18)式

$$S_{ij} = -\frac{\mathrm{i}}{4}[\alpha_i, \alpha_j] \xlongequal{(1.17)\text{式}} -\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{pmatrix}[\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j]\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varepsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ijk}\sigma_k\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix},$$

亦即

$$S_{ij}=\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\Sigma_k, \tag{2.84}$$

或

$$s_1=S_{23}=\frac{1}{2}\Sigma_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \sigma_1\end{pmatrix},$$

$$s_2=S_{31}=\frac{1}{2}\Sigma_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_2 & 0\\ 0 & \sigma_2\end{pmatrix}, \tag{2.85a}$$

$$s_3=S_{12}=\frac{1}{2}\Sigma_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix}.$$

亦即

$$s_i=\varepsilon_{ijk}S_{jk}=\frac{1}{2}\Sigma_i\quad(i,j,k=1,2,3), \tag{2.85b}$$

或

$$\boldsymbol{s}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{I}, \tag{2.85c}$$

与(1.31)式定义的狄拉克场的自旋算符是一致的,所以这里空间部分的三个矩阵 $s_i\,(i=1,2,3)$ 就是狄拉克场的自旋算符.(2.85c)式再一次表明,狄拉克方程描述的是自旋为 1/2 的粒子.

例 2.2　证明(2.81)与(2.82)两式.

证明　由(2.80)式知

$$\Lambda^{-1}(\varepsilon)=1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu},\quad \Lambda^{\dagger}(\varepsilon)=1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\dagger\mu\nu}S^{\dagger}_{\mu\nu}\xlongequal{\varepsilon^{\mu\nu}\text{为一实数}}1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S^{\dagger}_{\mu\nu}, \tag{2.86}$$

故由(2.77)式得

$$\gamma_0\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S^{\dagger}_{\mu\nu}\right)\gamma_0=1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu},$$

亦即

$$\gamma_0S^{\dagger}_{\mu\nu}\gamma_0=S_{\mu\nu},\ \Rightarrow\ (2.81)\text{式得证}.$$

由(2.54)、(2.80)及(2.86)三式,(2.79)式变为

$$\left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)\gamma^{\alpha}\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\right)=(g^{\alpha\beta}+\varepsilon^{\alpha\beta})\gamma_{\beta}$$

$$\Rightarrow-\frac{\mathrm{i}}{2}(\gamma^{\alpha}\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}-\varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\gamma^{\alpha})=\varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_{\beta},$$

亦即

$$[\gamma^{\alpha},\ \varepsilon^{\mu\nu}S_{\mu\nu}]=2\mathrm{i}\varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_{\beta},\ \Rightarrow\ (2.82)\text{式得证}.$$

例 2.3 证明(2.83)式.

证明 在(2.83)式中,若取 $\mu=i,\nu=j;i,j=1,2,3$,则

$$S_{ij}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_i,\gamma_j]\xrightarrow{(1.19)式}S_{ij}^{\dagger}=S_{ij},$$

又 $\gamma_0 S_{ij}=S_{ij}\gamma_0$,所以

$$\gamma_0 S_{ij}^{\dagger}\gamma_0=\gamma_0 S_{ij}\gamma_0=S_{ij},\Rightarrow (2.81)式成立.$$

若 $\mu=0,\nu=i,i=1,2,3$,

$$S_{0i}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_0,\gamma_i]\xrightarrow{(1.19)式}S_{0i}^{\dagger}=-S_{0i}.$$

而 $\gamma_0 S_{0i}=-S_{0i}\gamma_0$,所以

$$\gamma_0 S_{0i}^{\dagger}\gamma_0=-\gamma_0 S_{0i}\gamma_0=S_{0i},\Rightarrow (2.81)式成立.$$

将(2.83)式代入

$$\begin{aligned}(2.82)式左边&=\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\mu\nu}[\gamma^{\alpha},[\gamma_{\mu},\gamma_{\nu}]]\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\mu\nu}[\gamma^{\alpha},\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}-\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}]=\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\mu\nu}([\gamma^{\alpha},\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}]-[\gamma^{\alpha},\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}]).\end{aligned}$$

利用关系

$$[A,BC]=\{A,B\}C-B\{A,C\},\tag{2.87}$$

$$\begin{aligned}(2.82)式左边&=\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon^{\mu\nu}(\{\gamma^{\alpha},\gamma_{\mu}\}\gamma_{\nu}-\gamma_{\mu}\{\gamma^{\alpha},\gamma_{\nu}\}-\{\gamma^{\alpha},\gamma_{\nu}\}\gamma_{\mu}+\gamma_{\nu}\{\gamma^{\alpha},\gamma_{\mu}\})\\&\xlongequal{(1.19)式}\mathrm{i}\varepsilon^{\mu\nu}(\delta_{\alpha\mu}\gamma_{\nu}-\delta_{\alpha\nu}\gamma_{\mu})\\&=\mathrm{i}(\varepsilon^{\alpha\nu}\gamma_{\nu}-\varepsilon^{\mu\alpha}\gamma_{\mu})=2\mathrm{i}\varepsilon^{\alpha\beta}\gamma_{\beta}=(2.82)式右边,\Rightarrow (2.82)式成立.\end{aligned}$$

3. 电磁场

电磁场的拉格朗日密度由(2.10)式给出

$$\mathcal{L}_A=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=-\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu}).$$

在洛伦兹变换下,时空坐标及其导数按(2.50)与(2.68)式变换,即

$$x'^{\mu}=a^{\mu\nu}x_{\nu},\quad \partial'_{\mu}=a_{\mu\lambda}\partial^{\lambda}.$$

由于电磁势 $A_{\mu}(x)$ 是四维矢量,其变换性质与四维时空矢量相同,所以在洛伦兹变换下

$$A_{\mu}(x)\Rightarrow A'_{\mu}(x')=a_{\mu\nu}A^{\nu}(x),\tag{2.88}$$

可以证明,在洛伦兹变换下,电磁场的拉格朗日密度是不变的,因为

$$\begin{aligned}&(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu})(\partial^{\mu}A^{\nu}-\partial^{\nu}A^{\mu})\\\Rightarrow&(\partial'_{\mu}A'_{\nu}-\partial'_{\nu}A'_{\mu})(\partial'^{\mu}A'^{\nu}-\partial'^{\nu}A'^{\mu})\\=&(a_{\mu\lambda}\partial^{\lambda}a_{\nu\rho}A^{\rho}-a_{\nu\rho}\partial^{\rho}a_{\mu\lambda}A^{\lambda})(a^{\mu\alpha}\partial_{\alpha}a^{\nu\beta}A_{\beta}-a^{\nu\beta}\partial_{\beta}a^{\mu\alpha}A_{\alpha})\end{aligned}$$

$$=a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}a^{\mu\alpha}a^{\nu\beta}(\partial^\lambda A^\rho-\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)$$

$$\xlongequal{(2.52)\text{式}}g^\alpha_\lambda g^\beta_\rho(\partial^\lambda A^\rho-\partial^\rho A^\lambda)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha)$$

$$=(\partial^\alpha A^\beta-\partial^\beta A^\alpha)(\partial_\alpha A_\beta-\partial_\beta A_\alpha).$$

即拉格朗日密度在洛伦兹变换下不变.

另外,由于 $A_\mu(x)$ 还是一场量,所以在洛伦兹变换下它应按照(2.53)式变换,即

$$A_\mu(x)\Rightarrow A'_\mu(x')=\Lambda_{\mu\nu}(a)A^\nu(x), \tag{2.89}$$

(2.88)与(2.89)两式为同一变换的两种表示,所以

$$\Lambda_{\mu\nu}=a_{\mu\nu}. \tag{2.90}$$

在无穷小洛伦兹变换下,$a_{\mu\nu}$ 与 $\Lambda_{\mu\nu}$ 分别按照(2.54)与(2.58)式变换,因此有

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}S_{\alpha\beta,\mu\nu}. \tag{2.91}$$

由于

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\varepsilon^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\xlongequal{\alpha\leftrightarrow\beta}\varepsilon^{\beta\alpha}g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}=-\varepsilon^{\alpha\beta}g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu},$$

故

$$\varepsilon_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}),$$

与(2.91)式相比较知,自旋算符取形式

$$S_{\alpha\beta,\mu\nu}=(S_{\alpha\beta})_{\mu\nu}=\mathrm{i}(g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}-g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}), \tag{2.92}$$

将 $S_{\alpha\beta}$ 看成矩阵,μ 是它的行指标,ν 是它的列指标,则自旋算符可以写成矩阵形式

$$S_{01}=\begin{pmatrix}0&\mathrm{i}&0&0\\-\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},S_{02}=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}&0\\0&0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},S_{03}=\begin{pmatrix}0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$S_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},S_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},S_{31}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&\mathrm{i}\\0&0&0&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}.$$

S_{12},S_{23},S_{31} 是空间分量,是场的自旋算符,去掉 0 行 0 列,得 3×3 矩阵

$$s_1=S_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},s_2=S_{31}=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},s_3=S_{12}=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{2.93a}$$

或

$$s_i=\varepsilon_{ijk}S_{jk}\quad(i,j,k=1,2,3), \tag{2.93b}$$

则

$$s^2=(s_1)^2+(s_2)^2+(s_3)^2=2=1\times(1+1).$$

这表明,电磁场的场粒子即光子的自旋为 1,也就是说,电磁场是自旋为 1 的矢量场,这是我们已熟知的事实.

2.6 *PCT* 变 换

时空是均匀和各向同性的,如前所述,时空空间的这一特点可用连续变换,即时空平移与洛伦兹变换下的不变性来描述,与之相应的有能量、动量及角动量守恒.这些守恒量都是相加性守恒量,即一个复合系统的总守恒量等于各组成部分该守恒量的代数或矢量和.实际上,与连续对称变换所对应的守恒量都是相加性守恒量,这一结论不但适用于空间连续对称变换,也适用于内部空间的连续对称变换(参见 2.8 节).另外,像能量、动量与角动量这些量,它们的守恒都是严格的,即在任何物理过程中都守恒,通常称这样的守恒量为严格守恒量.

时空还有一些不再能用连续对称变换描述的对称性,如空间反射不变、正反粒子对称与时间反演不变等,这些对称性须改用分立对称变换来描述,如空间反射变换、电荷共轭变换及时间反演变换等,与之相应地有宇称守恒、C 宇称守恒等.这些守恒量都是相乘性守恒量,即一个复合系统的总守恒量等于各组成部分该守恒量的乘积.与分立对称变换所对应的守恒量都是相乘性守恒量.这些守恒量的重要特点之一是它们的守恒不是严格的,即在某些物理过程中是守恒的,在其他过程中不再守恒了.如在电磁与强作用过程中,一个孤立系统的宇称与 C 宇称都是守恒的,但在弱作用过程中,二者不再守恒了.通常称这些守恒量为近似或部分守恒量.

对于自由场,它具有最大的对称性,遵守所有的守恒定律.本节将以此为基础来确定不同场在各种分立对称变换下的变换形式.

2.6.1 空间反射变换

空间反射变换也叫 P 变换,定义为

$$\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad t\Rightarrow t'=t,\tag{2.94}$$

即空间坐标矢量反转,时间不变.在这种变换下,若拉格朗日密度保持不变,场量也要发生相应的变化.

1. 克莱因-戈尔登场

在空间反射下,场量的变换为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\phi'(-\boldsymbol{x},t)=\eta_P\phi(\boldsymbol{x},t),\tag{2.95}$$

由于在(2.94)式的变换下

$$\partial_\mu \partial^\mu \Rightarrow \partial'_\mu \partial'^\mu = \partial_\mu \partial^\mu,$$

所以拉格朗日密度(2.10)式不变要求

$$\phi'(-\boldsymbol{x},t)\phi'(-\boldsymbol{x},t)=\eta_P^2\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\quad(\text{实标量场}),$$

$$\phi'(-\boldsymbol{x},t)\phi'^*(-\boldsymbol{x},t)=|\eta_P|^2\phi(\boldsymbol{x},t)\phi^*(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\phi^*(\boldsymbol{x},t)\quad(\text{复标量场}),$$

因此

$$\eta_P^2=1,\quad \eta_P=\pm 1\quad(\text{实标量场}),$$

$$|\eta_P|^2=1,\quad \eta_P=\pm 1\quad(\text{复标量场}).$$

这样,在空间反射变换下,场量的本征变换为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\phi'(\boldsymbol{x},t)=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t).\tag{2.96}$$

$\eta_P=\pm 1$ 称为场的宇称,$\eta_P=+1$ 叫正宇称,$\eta_P=-1$ 叫负宇称.场的宇称由场的性质、根据实验来确定,如 π 介子与 K 介子场的宇称都是负的.

2.狄拉克场

狄拉克场 $\psi(x)$ 是 4×1 矩阵,在空间反射下,作线性变换

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\psi'(-\boldsymbol{x},t)=\eta_P P\psi(\boldsymbol{x},t),\tag{2.97}$$

其中,η_P 是一相因子,P 是 4×4 矩阵,其形式由拉格朗日密度(2.10)在(2.94)与(2.97)式的变换下保持不变来确定,即要求

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}'(-\boldsymbol{x},t)(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)\psi'(-\boldsymbol{x},t)\\
&=\psi'^\dagger(-\boldsymbol{x},t)\gamma_0(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)\eta_P P\psi(\boldsymbol{x},t)\\
&=\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)P^\dagger\eta_P^\dagger\gamma_0(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)\eta_P P\psi(\boldsymbol{x},t)\\
&=|\eta_P|^2\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\gamma_0 P^\dagger\gamma_0(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)P\psi(\boldsymbol{x},t)\\
&=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}-m)\psi(\boldsymbol{x},t).
\end{aligned}$$

比较上式最后一等号两边知

$$|\eta_P|^2=1,\Rightarrow\eta_P=\pm 1.$$

η_P 亦称为场的宇称,$\eta_P=+1$ 为正宇称,$\eta_P=-1$ 为负宇称.例如,核子(质子 p+中子 n)的宇称 $\eta_P=+1$,其他狄拉克粒子(自旋为 1/2)的宇称需由实验来确定.下面再来确定(2.97)式中的变换矩阵 P.

由含 ∂_0 的项相等得

$$\gamma_0 P^\dagger P=\gamma_0,\Rightarrow P^\dagger=P^{-1},$$

即 P 为一幺正矩阵.由含 m 的项相等得

$$\gamma_0 P^\dagger\gamma_0 P=1,\Rightarrow\gamma_0 P^\dagger\gamma_0=P^{-1},$$

由含 $\boldsymbol{\nabla}$ 的项相等得

$$\gamma_0 P^\dagger\gamma_0\boldsymbol{\gamma}P=-\boldsymbol{\gamma},\Rightarrow P^{-1}\boldsymbol{\gamma}P=-\boldsymbol{\gamma}.$$

以上三式是矩阵 P 应满足的方程，三式的解为

$$P=\gamma_0. \tag{2.98}$$

由此可见，在空间反射变换下，狄拉克场的本征变换为

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \psi'(\boldsymbol{x},t)=\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t), \tag{2.99}$$

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \bar{\psi}'(\boldsymbol{x},t)=\pm\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_0. \tag{2.100}$$

3. 电磁场

电磁场由四维电磁势 $A_\mu(x)$来描述，在空间反射变换下，其变换性质与时空矢量的变换性质相同，因此有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \boldsymbol{A}'(-\boldsymbol{x},t)=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t), \tag{2.101}$$

$$A_0(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow A'_0(-\boldsymbol{x},t)=A_0(\boldsymbol{x},t), \tag{2.102}$$

可见光子的宇称是负的. 在以上两式的变换下，电磁场的拉格朗日密度 $\mathcal{L}_A$保持不变[参见库仑规范下的(2.42)式与洛伦兹规范下的(2.46)式].

2.6.2 电荷共轭变换

电荷共轭变换又称为 C 变换或正反粒子变换，是将场变换成它的共轭场的一种对称操作.

1. 克莱因-戈尔登场

克莱因-戈尔登场 ϕ 的共轭场为 ϕ^*，其电荷共轭变换定义为

$$\phi(x) \Rightarrow \phi^C=\eta_C\phi^*, \quad \phi^* \Rightarrow \phi^{*C}=\eta_C^*\phi.$$

在上述变换下，(2.10)式复标量场的拉格朗日密度保持不变时要求

$$|\eta_C|^2=1,$$

取 $\eta_C=1$，得

$$\phi \Rightarrow \phi^C=\phi^*. \tag{2.103}$$

为了看出电荷共轭变换的意义，考虑 ϕ 与电磁场 A_μ 的相互作用. 由最小电磁耦合原理知，克莱因-戈尔登方程(2.9)变为

$$(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu-\mathrm{i}eA^\mu)\phi+m^2\phi=0, \tag{2.104}$$

取复共轭得

$$(\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu+\mathrm{i}eA^\mu)\phi^*+m^2\phi^*=0,$$

或由(2.103)式

$$(\partial_\mu+\mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu+\mathrm{i}eA^\mu)\phi^C+m^2\phi^C=0. \tag{2.105}$$

比较(2.104)与(2.105)两式知，ϕ 与 ϕ^C 运动方程的差异仅在于电荷 e 的符号，ϕ 描述的是电荷为 e 的场粒子，$\phi^C=\phi^*$ 描述的是电荷为 $-e$ 的场粒子，所以(2.103)式定义的电荷共轭变换是一种正反粒子变换.

对于实标量场，$\phi^* = \phi$，这样

$$\phi^C = \eta_C \phi^* = \eta_C \phi,$$

表明正反粒子的场量相同. 这是很显然的，因为如前所述，实标量场的场粒子是无荷的中性粒子，它们没有反粒子或反粒子就是他们本身. 拉格朗日密度不变要求

$$\phi^C \phi^C = \eta_C^2 \phi\phi = \phi\phi,$$

因此

$$\eta_C^2 = 1, \Rightarrow \eta_C = \pm 1,$$

η_C 称为场的 C 字称或电荷字称，$\eta_C = +1$ 称为正 C 字称，$\eta_C = -1$ 称为负 C 字称，如标量场 π^0 与 η 的 C 字称都是正的. 显然，只有中性粒子才有确定的 C 字称，有荷粒子不存在上述关系，所以没有确定的 C 字称.

2. 狄拉克场

狄拉克场 ψ 的共轭场为 $\bar{\psi}$，其电荷共轭变换定义为

$$\psi(x) \Rightarrow \psi^C = C\tilde{\bar{\psi}} = C\gamma_0 \tilde{\psi}^\dagger, \tag{2.106}$$

其中，C 是 4×4 矩阵，而

$$\bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}^C = \psi^{\dagger C}\gamma_0 = \tilde{\psi}\gamma_0 C^\dagger \gamma_0. \tag{2.107}$$

为了求出矩阵 C，考察狄拉克场 ψ 与电磁场 A_μ 的相互作用. 由最小电磁耦合原理知，狄拉克方程(2.9)变为

$$\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu)\psi - m\psi = 0, \tag{2.108}$$

而 ψ^C 满足运动方程

$$\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)\psi^C - m\psi^C = 0,$$

将(2.106)式代入上式得

$$\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu)C\tilde{\bar{\psi}} - mC\tilde{\bar{\psi}} = 0,$$

求转置并右乘 C^{-1} 得

$$\bar{\psi}\tilde{C}\mathrm{i}\tilde{\gamma}^\mu C^{-1}(\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) - m\bar{\psi}\tilde{C}C^{-1} = 0. \tag{2.109}$$

对(2.108)式求转置共轭得

$$-\mathrm{i}\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}(\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) - m\psi^\dagger = 0,$$

以 γ^0 右乘上式并注意到(1.19)式得

$$\bar{\psi}\mathrm{i}\gamma^\mu(\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}eA_\mu) + m\bar{\psi} = 0, \tag{2.110}$$

比较(2.109)与(2.110)两式中的 m 项得

$$\tilde{C}C^{-1} = -1 \Rightarrow \tilde{C} = -C, \tag{2.111}$$

比较两式中的 $\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$ 项得

$$\tilde{C}\tilde{\gamma}_\mu C^{-1} = \gamma_\mu \Rightarrow C^{-1}\gamma_\mu C = -\tilde{\gamma}_\mu. \tag{2.112}$$

(2.107)式的逆变换为

$$\bar{\psi}^C \Rightarrow \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 = \tilde{\psi}^C\gamma_0 C^\dagger \gamma_0,$$

另由(2.106)式知

$$\tilde{\bar{\psi}}=C^{-1}\psi^{C}, \Rightarrow \bar{\psi}=\tilde{\psi}^{C}\tilde{C}^{-1},$$

比较以上两式得

$$\gamma_0 C^{\dagger}\gamma_0=\tilde{C}^{-1}, \xrightarrow{(2.111)式} \gamma_0 C^{\dagger}\gamma_0=-C^{-1},$$

上式亦表明,电荷共轭变换(2.107)式可变成

$$\bar{\psi}^{C}=\psi^{\dagger C}\gamma_0=-\tilde{\psi}C^{-1}, \tag{2.113}$$

且

$$C^{\dagger}\gamma_0=-\gamma_0 C^{-1},$$

又由(2.112)式知

$$C^{-1}\gamma_0 C=-\gamma_0, \Rightarrow C^{-1}\gamma_0=-\gamma_0 C^{-1},$$

以上两式表明

$$C^{\dagger}=C^{-1}. \tag{2.114}$$

即 C 是幺正的.(2.111)、(2.112)及(2.114)式是矩阵 C 应满足的条件,可以证明满足这三方面条件的矩阵取形式

$$C=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2. \tag{2.115}$$

例 2.4　证明(2.115)式.

证明

$$\tilde{C}=\mathrm{i}\tilde{\gamma}^2\tilde{\gamma}^0,$$

由于

$$\boldsymbol{\gamma} \xlongequal{(1.18)式} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\gamma}}=\begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix},$$

且

$$\boldsymbol{\sigma}^{\dagger}=\boldsymbol{\sigma}, \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}^{*}, \Rightarrow \tilde{\sigma}_1=\sigma_1, \tilde{\sigma}_2=-\sigma_2, \tilde{\sigma}_3=\sigma_3, \tag{2.116}$$

故

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}=(-\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3), \quad \tilde{\gamma}_0=\gamma_0, \tag{2.117}$$

于是

$$\tilde{C}=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0=-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2=-C, \Rightarrow (2.111)式得证.$$

又

$$C^{\dagger}=-\mathrm{i}\gamma^{2\dagger}\gamma^{0\dagger} \xlongequal{(1.19)式} \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0,$$

则

$$CC^{\dagger}=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0=-\gamma^0\gamma^2\gamma^2\gamma^0=\gamma^0\gamma^0=1, \Rightarrow C^{\dagger}=C^{-1}, \Rightarrow (2.114)式得证.$$

同样可证明(2.112)式,读者可自证之.

例 2.5　证明在电荷共轭变换下,狄拉克场的拉格朗日密度保持不变.

证明　在电荷共轭变换下,狄拉克场及其共轭场分别作(2.106)与(2.113)式的变换,而拉格朗日密度变为

$$\mathcal{L}_\psi^C=\bar{\psi}^C(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi^C=-\tilde{\psi}C^{-1}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)C\tilde{\bar{\psi}}$$
$$\xlongequal{(2.112)式}\tilde{\psi}(\mathrm{i}\tilde{\gamma}^\mu\partial_\mu+m)\tilde{\bar{\psi}}.$$

上式两边取转置,注意到 $\mathcal{L}_\psi^C$ 只是一个标量函数,得

$$\mathcal{L}_\psi^C=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu+m)\psi=\mathrm{i}\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)-\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi,$$

去掉无关紧要的四维散度及负号,上式变为

$$\mathcal{L}_\psi^C=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=\mathcal{L}_\psi,\ \Rightarrow\ 拉格朗日密度保持不变.$$

3. 电磁场

电磁势 A_μ 有四个分量,都是实的,因此其复共轭等于其本身,但在电荷共轭变换下,电荷要变号,所以由它们激发的电磁势 A_μ 亦变号,这样在电荷共轭变换下,电磁势的变换为

$$A_\mu\Rightarrow A_\mu^C=\eta_C A_\mu^*=\eta_C A_\mu=-A_\mu,\ \Rightarrow\eta_C=-1.\tag{2.118}$$

光子场是一中性矢量场,有确定的 C 宇称,上式表明其 C 宇称是负的.显然,在上式变换下,(2.10)式中的拉格朗日密度 $\mathcal{L}_A$ 是不变的.

2.6.3　时间反演变换

时间反演变换又称 T 变换,定义为

$$\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x},\quad t\Rightarrow t'=-t,\tag{2.119}$$

同时场量亦要作相应的变换,以使拉格朗日密度保持不变.

1. 克莱因-戈尔登场

克莱因-戈尔登场的变换为

$$\phi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\phi'(\boldsymbol{x},-t)=\eta_T\phi(\boldsymbol{x},t),\tag{2.120}$$

由于在(2.119)式的变换下

$$\partial_\mu\partial^\mu\Rightarrow\partial'_\mu\partial'^\mu=\partial_\mu\partial^\mu,$$

所以拉格朗日密度(2.10)式不变要求

$$\phi'(\boldsymbol{x},-t)\phi'(\boldsymbol{x},-t)=\eta_T^2\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\phi(\boldsymbol{x},t)\quad(实标量场),$$
$$\phi'(\boldsymbol{x},-t)\phi'^*(\boldsymbol{x},-t)=|\eta_T|^2\phi(\boldsymbol{x},t)\phi^*(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},t)\phi^*(\boldsymbol{x},t)\quad(复标量场),$$

因此

$$\eta_T^2=1,\quad\eta_T=\pm1\quad(实标量场),$$
$$|\eta_T|^2=1,\quad\eta_T=\pm1\quad(复标量场).$$

通常取 $\eta_T=1$,则在时间反演变换下,克莱因-戈尔登场的本征变换为

$$\phi'(\boldsymbol{x},t)=\phi(\boldsymbol{x},-t). \tag{2.121}$$

2. 狄拉克场

在时间反演变换下,狄拉克场的变换为

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\psi'(\boldsymbol{x},-t)=T\psi(\boldsymbol{x},t), \tag{2.122}$$

其中,T 是 4×4 矩阵,其具体形式可由(2.10)式中的拉格朗日密度 $\mathcal{L}_\psi$ 在时间反演变换下不变来确定,即

$$\bar{\psi}'(\boldsymbol{x},-t)(-\mathrm{i}\gamma^0\partial_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)^*\psi'(\boldsymbol{x},-t)=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\boldsymbol{x},t),$$

这里应该注意的是,时间反演变换和其他变换不同,除坐标、场量变换外,其他的量要取复共轭,其理由在后面(3.8节)将作说明,在那里将会看到,这样处理的目的是为了使量子化后场的对易关系在时间反演变换下保持不变.变写上式左边

$$\text{左边}=\psi^\dagger(\boldsymbol{x},t)T^\dagger\gamma_0(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}^*\cdot\nabla-m)T\psi(\boldsymbol{x},t),$$

由(1.19)式知

$$\gamma_0=\tilde{\gamma}_0,\quad \boldsymbol{\gamma}^*=-\tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \tag{2.123}$$

则

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\gamma_0T^\dagger\gamma_0(\mathrm{i}\tilde{\gamma}^0\partial_0+\mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{\gamma}}\cdot\nabla-m)T\psi(\boldsymbol{x},t)\\&=\text{右边}=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)(\mathrm{i}\gamma^0\partial_0+\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla-m)\psi(\boldsymbol{x},t).\end{aligned}$$

由含 m 的项相等得

$$\gamma_0T^\dagger\gamma_0T=1,\Rightarrow\gamma_0T^\dagger\gamma_0=T^{-1}, \tag{2.124}$$

由含时空导数的项相等得

$$\gamma_0T^\dagger\gamma_0\tilde{\gamma}_\mu T=\gamma_\mu,\Rightarrow T^{-1}\tilde{\gamma}_\mu T=\gamma_\mu. \tag{2.125}$$

上式中,取 $\mu=0$ 得

$$T^{-1}\tilde{\gamma}_0T=\gamma_0,\xrightarrow{(2.123)\text{式}}T^{-1}\gamma_0T=\gamma_0,\Rightarrow\gamma_0T^{-1}\gamma_0=T^{-1},$$

与(2.124)式比较得

$$T^\dagger=T^{-1}, \tag{2.126}$$

即 T 是一幺正矩阵.对(2.125)式取转置得

$$\tilde{T}\gamma_\mu\tilde{T}^{-1}=\tilde{\gamma}_\mu,$$

对上式左乘 T^{-1},右乘 T 得

$$T^{-1}\tilde{T}\gamma_\mu\tilde{T}^{-1}T=T^{-1}\tilde{\gamma}_\mu T\xlongequal{(2.125)\text{式}}\gamma_\mu,$$

由此得

$$T^{-1}\tilde{T}=\pm1,\Rightarrow\tilde{T}=\pm T,$$

通常取

$$\tilde{T}=-T. \tag{2.127}$$

(2.125)～(2.127)三式是变换矩阵 T 应满足的条件,可以证明满足这三方面条件的 T 取形式

$$T=\gamma_5 C^{-1}=\gamma^1\gamma^3. \tag{2.128}$$

由(2.122)式知,在时间反演变换下,狄拉克场的本征变换为

$$\psi(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\psi'(\boldsymbol{x},t)=T\psi(\boldsymbol{x},-t), \tag{2.129}$$

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\bar{\psi}'(\boldsymbol{x},t)&=\psi'^{\dagger}(\boldsymbol{x},t)\gamma_0=\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x},-t)T^{\dagger}\gamma_0\\&=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)\gamma_0T^{\dagger}\gamma_0\\&\xlongequal{(2.124)\text{式}}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)T^{-1}.\end{aligned} \tag{2.130}$$

例 2.6　证明(2.128)式.

证明　由(2.115)式知

$$C^{-1}=\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0,$$

再由(1.20)式得

$$T=\gamma_5C^{-1}=-\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3(\mathrm{i}\gamma^2\gamma^0)\xlongequal{(1.19)\text{式}}\gamma^1\gamma^3,$$

$$T^{\dagger}=\gamma^{3\dagger}\gamma^{1\dagger}\xlongequal{(1.19)\text{式}}\gamma^3\gamma^1,\Rightarrow T^{\dagger}T=\gamma^3\gamma^1\gamma^1\gamma^3=1,$$

即

$$T^{\dagger}=T^{-1},\Rightarrow(2.126)\text{式得证}.$$

又

$$\widetilde{T}=\tilde{\gamma}^3\tilde{\gamma}^1\xlongequal{(2.117)\text{式}}\gamma^3\gamma^1=-\gamma^1\gamma^3=-T,\Rightarrow(2.127)\text{式得证}.$$

同样可证明(2.125)式,读者可自证之.

3. 电磁场

电磁势 $A^{\mu}=(A_0,\boldsymbol{A})=(\phi,\boldsymbol{A})$,$A_0=\phi$ 是由电荷产生的,$\boldsymbol{A}$ 是由电流产生的,当时间作反演变换时,电流将倒流,而电荷不变,所以电磁势的本征变换为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t), \tag{2.131}$$

$$A_0(\boldsymbol{x},t)\Rightarrow A_0'(\boldsymbol{x},t)=A_0(\boldsymbol{x},-t), \tag{2.132}$$

在上述变换下,拉格朗日密度[参见(2.42)与(2.46)式]保持不变.

2.7　协变双旋量

在狄拉克场的拉格朗日密度 $\mathcal{L}_{\psi}$ 中[参见(2.10)式],其场量 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$ 以双旋量的形式出现.其实,在所有有确定意义的物理量中,旋量总是成对地出现,所以这里将讨论双旋量的种类和它们的变换性质.

如前面所述，γ 矩阵共有 4 个，$\gamma^\mu(\mu=0,1,2,3)$，每个都是 4×4 矩阵，满足关系(1.19)式. 线性独立的 4×4 矩阵共有 16 个，它们可由单位矩阵 I 与 γ 矩阵组合而成

$$\begin{matrix} I & \gamma_\mu & \gamma_\mu\gamma_\nu & \gamma_5\gamma_\mu & \gamma_5, \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1, \end{matrix} \tag{2.133}$$

每组包含的 γ 矩阵数依次为 0,1,2,3,4 个. 由这些线性独立的 4×4 矩阵，可构成如下 16 个线性独立的协变双旋量

$$\bar{\psi}\psi,\quad \bar{\psi}\gamma_\mu\psi,\quad \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_\nu\psi,\quad \bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi,\quad \bar{\psi}\gamma_5\psi, \tag{2.134}$$

按照它们在洛伦兹变换和空间反射变换下的变换性质，依次分别称为标量、矢量、张量、赝矢量、赝标量. 下面分别讨论一下它们在洛伦兹变换与空间反射变换下的变换特点.

2.7.1　洛伦兹变换

由(2.50)、(2.75)、(2.78)与(2.79)四式知，在洛伦兹变换下

$$\begin{aligned} &x_\mu \Rightarrow x'_\mu = a_{\mu\nu}x^\nu, \\ &\psi(x) \Rightarrow \psi'(x') = \Lambda(a)\psi(x), \\ &\bar{\psi}(x) \Rightarrow \bar{\psi}(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}(a), \\ &\Lambda^{-1}(a)\gamma_\mu\Lambda(a) = a_{\mu\nu}\gamma^\nu. \end{aligned}$$

这样，(2.134)式给出的双旋量在洛伦兹变换下的变换为

$$\begin{aligned} &\bar{\psi}'(x')\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\psi(x), \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\psi'(x') = a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x), \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma_\mu\gamma_\nu\psi'(x') = a_{\mu\lambda}a_{\nu\rho}\bar{\psi}(x)\gamma^\lambda\gamma^\rho\psi(x), \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_\mu\psi'(x') = \det a\, a_{\mu\nu}\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\nu\psi(x), \\ &\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det a\,\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x), \end{aligned}$$

其中，$\det a$ 为矩阵 $a_{\mu\nu}$ 的行列式，例如，

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda\psi(x),$$

而

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}\gamma_5\Lambda &= -\mathrm{i}\Lambda^{-1}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\Lambda \\ &= -\mathrm{i}a^0_\mu a^1_\nu a^2_\lambda a^3_\rho \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho \\ &= -\mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \begin{vmatrix} a^0_0 & a^0_1 & a^0_2 & a^0_3 \\ a^1_0 & a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_0 & a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_0 & a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} \\ &= \gamma_5 \det a, \end{aligned}$$

因此

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x') = \det a\,\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x).$$

对于不改变坐标轴右手螺旋关系的固有洛伦兹变换，$\det a=1$. 这样，$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$与$\bar{\psi}(x)\psi(x)$的变换形式相同，二者在洛伦兹变换下都保持不变，所以它们都是标量. $\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$与$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$的变换形式相同，且二者与时空矢量$x_\mu$的变换形式一样，因此它们都是矢量，而$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_\nu\psi(x)$是二阶张量.

2.7.2　空间反射变换

由(2.94)、(2.99)与(2.100)三式知，在空间反射变换下

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad t \Rightarrow t'=t,$$

$$\psi(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \psi'(-\boldsymbol{x},t)=\pm\gamma_0\psi(\boldsymbol{x},t),$$

$$\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t) \Rightarrow \bar{\psi}'(-\boldsymbol{x},t)=\pm\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\gamma_0.$$

这样，双旋量在空间反射下的变换为

$$\bar{\psi}'(x')\psi'(x')=\bar{\psi}(x)\psi(x).$$

$$\begin{cases}\bar{\psi}'(x')\gamma_i\psi'(x')=-\bar{\psi}(x)\gamma_i\psi(x),\\ \bar{\psi}'(x')\gamma_0\psi'(x')=\bar{\psi}(x)\gamma_0\psi(x).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\psi}'(x')\gamma_0\gamma_i\psi'(x')=-\bar{\psi}(x)\gamma_0\gamma_i\psi(x),\\ \bar{\psi}'(x')\gamma_i\gamma_j\psi'(x')=\bar{\psi}(x)\gamma_i\gamma_j\psi(x).\end{cases}$$

$$\begin{cases}\bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_i\psi'(x')=\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_i\psi(x),\\ \bar{\psi}'(x')\gamma_5\gamma_0\psi'(x')=-\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_0\psi(x).\end{cases}$$

$$\bar{\psi}'(x')\gamma_5\psi'(x')=-\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x).$$

由此可见，在空间反射变换下，$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$如同四维矢量一样，空间分量变号，时间分量不变号，而$\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$却恰好相反，空间分量不变号，时间分量变号. 因此，尽管$\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$在洛伦兹变换下与四维矢量的变换形式相同，但它不是真正意义上的矢量，所以称其为赝矢量，而称$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)$为矢量. 同样，由于$\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$在空间反射变换下变号，所以它也不是真正意义上的标量，称为赝标量，而称$\bar{\psi}(x)\psi(x)$为标量.

2.8　内部空间的对称性

按照 Noether 定理，可用连续不变性表示的对称性总有相应的守恒定律，对称性是守恒定律的基础. 如与时空均匀性、各向同性相应，存在着场的能量守恒定律、动量守恒定律及角动量守恒定律，且相应的守恒量都是相加性的严格守恒量.

物理中还存在着许多守恒定律，如电荷守恒、重子数守恒、轻子数守恒、奇异数守恒及同位旋守恒等. 这些守恒定律在时空空间中找不到与之相应的对称性，那么与这

些守恒定律相应的对称性是什么呢？为了回答这个问题，人们假设除了时空空间外，还存在着内禀空间，称为“内部空间”.许多守恒定律都起因于内部空间的对称性.内部空间有味道空间和颜色空间之分，味道空间由电荷、自旋、同位旋、重子数、奇异数及超核等自由度构成，颜色空间由红色、绿色及蓝色自由度构成.如夸克有 u、d、s、c、b、t 六种味道，每味夸克又有红、绿、蓝三种颜色.

电荷守恒、重子数守恒及轻子数守恒等，起因于味道空间的轴对称性，可以通过味道空间绕轴转动下的不变性来求出其相应的守恒流和守恒荷.在味道空间绕某一轴的转动定义为

$$\phi_\alpha \Rightarrow \phi'_\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi_\alpha, \tag{2.135}$$

其中，θ 为转角，是任意实数.对于无穷小转动，θ 是一小量，则

$$\phi'_\alpha = (1-\mathrm{i}\theta)\phi_\alpha,\ \Rightarrow \delta\phi_\alpha = -\mathrm{i}\theta\phi_\alpha,\quad \delta\phi_\alpha^* = \mathrm{i}\theta\phi_\alpha^*.$$

显然，上述变换是一种连续变换，若场的拉格朗日密度 $\mathscr{L}(\phi_\alpha,\partial_\mu\phi_\alpha)$ 在该变换下不变，则由 Noether 定理知，就存在守恒定律，其守恒流和守恒荷由(2.20)与(2.22)式给出

$$j^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \mathscr{L}\delta x^\mu,$$

$$Q = \int j^0\,\mathrm{d}^3x,\quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.$$

注意到内部空间与时空坐标无关，$\delta x^\mu = 0$，则守恒流与守恒荷为

$$j^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\delta\phi_\alpha + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha^*}\delta\phi_\alpha^*,$$

或

$$j^\mu = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}\phi_\alpha - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha^*}\phi_\alpha^*\right), \tag{2.136}$$

$$Q = \int j^0\,\mathrm{d}x^3 = -\mathrm{i}\int\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha}\phi_\alpha - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}_\alpha^*}\phi_\alpha^*\right)\mathrm{d}x^3. \tag{2.137}$$

对于不同的场，j^μ 和 Q 有不同的形式与意义，如 Q 可以是场粒子的电荷，也可以是奇异数，或是轻子数与底数等，这些守恒量显然都是相加性守恒量，所以与内部空间连续绕轴转动变换所对应的守恒量是相加性守恒量.在这些守恒量中，有的是严格的，如电荷、轻子数与重子数等；有的是近似的，如奇异数与底数等.

对于实标量场或电磁场，由于 $\phi^* = \phi$，$A_\mu^* = A_\mu$，则

$$j^\mu = 0,\quad Q = 0, \tag{2.138}$$

表明实标量场或电磁场的守恒流与守恒荷都为零，它们描述的是内部相加性守恒量都为零的无荷中性粒子.如上所述，π^0 与 η 等是典型的中性标量粒子，而 γ 光子是一种广为熟知的中性矢量粒子.

对于复标量场

$$\mathscr{L}_{\phi^*} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi,$$

其守恒流与守恒荷为

$$j^{\mu}=-\mathrm{i}(\partial^{\mu}\phi^{*}\phi-\partial^{\mu}\phi\phi^{*}),\quad Q=-\mathrm{i}\int(\dot{\phi}^{*}\phi-\dot{\phi}\phi^{*})\mathrm{d}^{3}x, \tag{2.139}$$

表明复标量场描述的是内部相加性守恒量不全为零的有荷标量粒子，如前面所说的$\pi^{\pm}$、K^{0}与$\overline{K}^{0}$等.

对于狄拉克场

$$\mathcal{L}_{\psi}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi,$$

守恒流与守恒荷为

$$j^{\mu}=\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi,\quad Q=\int\psi^{\dagger}\psi\mathrm{d}^{3}x. \tag{2.140}$$

第3章　量子场论

到目前为止,我们所涉及的都是相对论量子力学的内容,所处理的场都是经典场,即场量是描述场粒子的几率波函数.经典场论的不足之处主要有两方面:一是克莱因-戈尔登场与电磁场都存在着负能困难,二是经典场不能描述粒子的产生与湮灭现象.为了克服这两方面困难,人们将经典场量子化,由此得到了量子场.

量子化方法有两种:一种是正则量子化,另一种是路径积分量子化.前者只适用于电磁作用的阿贝尔(Abel)规范理论,后者主要用于非阿贝尔规范理论,如弱电统一规范理论与量子色动力学采用的就是路径积分量子化方法.限于本书的范围,我们只对自由场的正则量子化方法加以讨论.

3.1　正则量子化

第2章讨论了经典场的拉格朗日场理论,给出了不同场的拉格朗日密度、能量、动量及自旋等.场的量子化就是将场量视为算符.正则量子化,就是把拉格朗日形式的场,变成哈密顿正则形式,找到场的正则坐标与正则动量,确定它们的对易关系,从而完成从经典场量到算符的转化,实现量子化,即二次量子化.为了便于理解这个过程,下面先讨论一下力学系统的量子化问题.

3.1.1　一个自由度力学系统的正则量子化

在拉格朗日力学中,描述力学系统的运动规律是拉格朗日方程

$$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}=0, \tag{3.1}$$

其中,$q(t)$是广义坐标,$\dot{q}(t)$是广义速度,$L[q(t),\dot{q}(t)]$是拉格朗日函数.

在哈密顿力学中,描述力学系统的运动规律是哈密顿运动方程

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}, \tag{3.2}$$

其中,$q(t)$为正则坐标,

$$p(t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{3.3}$$

为正则动量,

$$H=p\dot{q}-L \tag{3.4}$$

为哈密顿函数,这些内容在分析力学中已学过.

正则量子化,就是把正则坐标 $q(t)$ 和正则动量 $p(t)$ 都看成算符,并满足正则对易关系

$$
\begin{aligned}
&[q(t),\ p(t)]=\mathrm{i},\\
&[q(t),\ q(t)]=0,\quad [p(t),\ p(t)]=0,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

由量子力学知

$$
[H,\ q]=-\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial p},\quad [H,\ p]=\mathrm{i}\frac{\partial H}{\partial q},
$$

这样,哈密顿运动方程(3.2)可改写成

$$
\dot{q}=\mathrm{i}[H,\ q],\quad \dot{p}=\mathrm{i}[H,\ p]. \tag{3.6}
$$

3.1.2 n 个自由度力学系统的正则量子化

在该情况下,广义坐标与广义速度各有 n 个,即

$$
q_i(t),\quad \dot{q}_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n,
$$

拉格朗日运动方程为

$$
\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3.7}
$$

$L[q_i(t),\ \dot{q}_i(t)]$ 为拉格朗日函数.

转到哈密顿力学,正则坐标与正则动量各有 n 个,即

$$
q_i(t),\quad p_i(t)=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},\quad i=1,2,\cdots,n,
$$

哈密顿运动方程为

$$
\begin{aligned}
&\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\quad i=1,2,\cdots,n,\\
&H=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-L.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

正则量子化,就是把正则坐标、正则动量都看成算符,并满足正则对易关系

$$
\begin{aligned}
&[q_i(t),\ p_j(t)]=\mathrm{i}\delta_{ij},\\
&[q_i(t),\ q_j(t)]=0,\quad [p_i(t),\ p_j(t)]=0,
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

而运动方程(3.6)可写成

$$
\dot{q}_i=\mathrm{i}[H,\ q_i],\quad \dot{p}_i=\mathrm{i}[H,\ p_i]. \tag{3.10}
$$

3.1.3 自由场的正则量子化

在拉格朗日力学中,广义坐标 $q_i(t)$、广义速度 $\dot{q}_i(t)$ 以及拉格朗日函数 $L[q_i(t),\dot{q}_i(t)]$ 都只是时间 t 的函数,而场量 $\phi(x)$、场量的时间导数 $\dot{\phi}(x)$ 以及由它们构成的拉格朗日密度 $\boldsymbol{\mathcal{L}}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]$ 不仅是时间 t 的函数,也是空间坐标 $\boldsymbol{x}$ 的函

数. 因此要按上述方法将它们量子化,就要首先把它们变成只是时间 t 的函数. 为此把空间格子化,将空间划分成许多的小格子. 假设第 i 个小格子的体积为 ΔV_i,在该小格子中

$$\begin{aligned}
\phi_i(t) &= \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i}\phi(x)\mathrm{d}^3x,\\
\dot{\phi}_i(t) &= \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i}\dot{\phi}(x)\mathrm{d}^3x,\\
\mathcal{L}_i(t) &= \frac{1}{\Delta V_i}\int_{\Delta V_i}\mathcal{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]\mathrm{d}^3x.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

即第 i 个小格子内的广义坐标、广义速度与拉格朗日密度函数,取成该区域内相应量的平均值,而拉格朗日函数

$$L(t) = \sum_i \mathcal{L}_i(t)\Delta V_i. \tag{3.12}$$

这样,各量都只是时间 t 的函数,而 $i=1,2,\cdots$ 是小格子的编号,可以看成是自由度的指标. 当每个小格子的体积 $\Delta V_i \Rightarrow 0$ 时,空间就有无穷多个小格子,这样体系就有无穷多个自由度,所以,如 2.2 节所述,场是一个具有无穷多个自由度的力学系统.

在拉格朗日力学中,格子化的场用

$$\phi_i(t),\quad \dot{\phi}_i(t),\quad i=1,2,\cdots,n,$$
$$L$$

描述,转到哈密顿力学,格子化的场用

$$\begin{aligned}
&\phi_i(t),\quad p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}_i} = \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial\dot{\phi}_i}\Delta V_i,\quad i=1,2,\cdots,n,\\
&H = \sum_i p_i\dot{\phi}_i - L
\end{aligned} \tag{3.13}$$

描述.

正则量子化后,将 $\phi_i(t)$,$p_i(t)$ 都看成是算符,且满足对易关系

$$\begin{aligned}
&[\phi_i(t),\ p_j(t)] = \mathrm{i}\delta_{ij},\\
&[\phi_i(t),\ \phi_j(t)] = 0,\quad [p_i(t),\ p_j(t)] = 0,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

及运动方程

$$\dot{\phi}_i(t) = \mathrm{i}[H,\ \phi_i(t)],\quad \dot{p}_i = \mathrm{i}[H,\ p_i(t)]. \tag{3.15}$$

当每个小格子的体积 $\Delta V_i\Rightarrow 0$ 时,由(3.11)~(3.13)各式定义的量就又回到了我们熟知的场量

$$\begin{aligned}
&\phi_i(t) \Rightarrow \phi(x),\quad \dot{\phi}_i(t) \Rightarrow \dot{\phi}(x),\\
&\pi_i(t) = \frac{\partial\mathcal{L}_i}{\partial\dot{\phi}_i} \Rightarrow \pi(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}},\\
&p_i(t) = \pi_i(t)\Delta V_i \Rightarrow \pi(x)\mathrm{d}x^3,
\end{aligned}$$

$$L(t)=\sum_i \mathscr{L}_i(t)\Delta V_i \Rightarrow L(t)=\int \mathscr{L}(x)\mathrm{d}^3x,$$

$$H=\sum_i p_i\dot{\phi}_i-L=\sum_i(\pi_i\dot{\phi}_i-\mathscr{L}_i)\Delta V_i$$

$$\Rightarrow H=\int(\pi\dot{\phi}-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x=\int \mathscr{H}\,\mathrm{d}^3x,$$

$$\mathscr{H}=\pi\dot{\phi}-\mathscr{L},$$

其中,$\pi(x)$为正则动量密度,简称为正则动量,$\mathscr{H}$为哈密顿密度.

由(3.14)式表示的对易关系将变成

$$[\phi_i(t),\ p_j(t)]=[\phi_i(t),\ \pi_j(t)]\Delta V_j=\mathrm{i}\delta_{ij}$$

$$\Rightarrow [\phi_i(t),\ \pi_j(t)]=\mathrm{i}\frac{\delta_{ij}}{\Delta V_j}$$

$$\Rightarrow [\phi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

$$[\phi_i(t),\ \phi_j(t)]=0$$

$$\Rightarrow [\phi(\boldsymbol{x},t),\ \phi(\boldsymbol{x}',t)]=0,$$

$$[\pi_i(t),\ \pi_j(t)]=0$$

$$\Rightarrow [\pi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=0.$$

而(3.15)式表示的运动方程变为

$$\dot{\phi}_i(t)=\mathrm{i}[H,\ \phi_i(t)] \Rightarrow \dot{\phi}(x)=\mathrm{i}[H,\ \phi(x)],$$

$$\dot{p}_i(t)=\mathrm{i}[H,\ p_i(t)] \Rightarrow \dot{\pi}(x)=\mathrm{i}[H,\ \pi(x)].$$

综合以上所得结果,自由场的正则量子化步骤如下:将拉格朗日场论中的 $\phi(x)$ 和 $\dot{\phi}(x)$及 $\mathscr{L}[\phi(x),\partial_\mu\phi(x)]$换成哈密顿形式

$$\phi(x),\quad \pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}},\quad \mathscr{H}=\pi\dot{\phi}-\mathscr{L},\quad H=\int\mathscr{H}\,\mathrm{d}^3x, \tag{3.16}$$

再将 $\phi(x)$与 $\pi(x)$看作算符,满足对易关系和运动方程

$$\begin{aligned}&[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ &[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \phi(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\pi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\dot{\phi}(x)=\mathrm{i}[H,\ \phi(x)],\quad \dot{\pi}(x)=\mathrm{i}[H,\ \pi(x)]. \tag{3.18}$$

由此可见,正则量子化的核心问题在于确定共轭的正则变量及它们间的对易关系.正则变量可由经典场理论得到,而对易关系仅仅是一种假设,不可能由经典场理论导出,它们是量子场论的基本假设或第一性原理,是量子场论的基础.

3.2　实标量场的量子化

实标量场,由于其实数与标量的特点,在数学处理上比较简单.本节将采用上述正则量子化方法对该场实现量子化,以具体阐述正则量子化方法,得到量子化的场,

消除经典克莱因-戈尔登场所存在的负能量困难.

3.2.1　经典场

经典克莱因-戈尔登场是如(1.7)式所示的平面波,它是时空空间的单分量或0阶旋量波函数,是一标量函数.由于其自旋为零,在洛伦兹变换下不变[参见(2.73)式],故经典克莱因-戈尔登场还是一洛伦兹标量场,再加上实数性要求,就叫实标量场,其拉格朗日密度由(2.10)式给出

$$\mathcal{L}_\phi=\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-\frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

正则坐标为 ϕ,正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}(x),\tag{3.19}$$

按照(2.33)或(3.16)式,场的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=\frac{1}{2}\int[\pi^2+(\nabla\phi)^2+m^2\phi^2]\mathrm{d}^3x\\&=\int(\pi\dot{\phi}-\mathcal{L})\mathrm{d}^3x.\end{aligned}\tag{3.20}$$

由(2.34)式,场的动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int\dot{\phi}\,\nabla\phi\mathrm{d}^3x=-\int\pi\,\nabla\phi\mathrm{d}^3x,\tag{3.21}$$

由(2.138)式,场的守恒荷为

$$Q=0.\tag{3.22}$$

3.2.2　量子化

按照正则量子化方法,将正则坐标 ϕ 和正则动量 $\pi=\dot{\phi}$ 看成算符且满足对易关系

$$\begin{aligned}&[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=[\phi(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\&[\phi(\boldsymbol{x},t),\phi(\boldsymbol{x}',t)]=0,\\&[\pi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=[\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t),\dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)]=0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

其运动方程为

$$\dot{\phi}=\mathrm{i}[H,\phi],\quad\dot{\pi}=\mathrm{i}[H,\pi].\tag{3.24}$$

这时的哈密顿量 H 与动量 $\boldsymbol{p}$ 也是算符,将它们代入上式得

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t)&=\frac{\mathrm{i}}{2}\int\mathrm{d}^3x'[\pi^2(\boldsymbol{x}',t)+[\nabla'\phi(\boldsymbol{x}',t)]^2+m^2\phi^2(\boldsymbol{x}',t),\phi(\boldsymbol{x},t)]\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x'\pi(\boldsymbol{x}',t)[\pi(\boldsymbol{x}',t),\phi(\boldsymbol{x},t)]\\&=\int\mathrm{d}^3x'\pi(\boldsymbol{x}',t)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\end{aligned}$$

$$= \pi(\boldsymbol{x},t), \Rightarrow \text{与(3.19)式相一致.}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}(\boldsymbol{x},t) &= \ddot{\phi}(\boldsymbol{x},t), \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3 x' [\pi^2(\boldsymbol{x}',t) + [\nabla'\phi(\boldsymbol{x}',t)]^2 + m^2\phi^2(\boldsymbol{x}',t), \pi(\boldsymbol{x},t)] \\
&= \frac{\mathrm{i}}{2}\int \mathrm{d}^3 x' [[\nabla'\phi(\boldsymbol{x}',t)]^2 + m^2\phi^2(\boldsymbol{x}',t), \pi(\boldsymbol{x},t)] \\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3 x' \{\nabla'\phi(\boldsymbol{x}',t)\cdot\nabla'[\phi(\boldsymbol{x}',t), \pi(\boldsymbol{x},t)] \\
&\quad + m^2\phi(\boldsymbol{x}',t)[\phi(\boldsymbol{x}',t), \pi(\boldsymbol{x},t)]\} \\
&= -\int \mathrm{d}^3 x' [\nabla'\phi(\boldsymbol{x}',t)\cdot\nabla'\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}) + m^2\phi(\boldsymbol{x}',t)\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})].
\end{aligned}$$

注意到含 δ 函数的积分公式

$$\begin{aligned}
&\int f(\boldsymbol{x}')\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x' = f(\boldsymbol{x}), \\
&\int f(\boldsymbol{x}')\nabla'\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x' = -\nabla f(\boldsymbol{x}), \qquad (3.25) \\
&\int f(\boldsymbol{x}')\nabla'^2\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\mathrm{d}^3 x' = \nabla^2 f(\boldsymbol{x}),
\end{aligned}$$

得

$$\ddot{\phi}(\boldsymbol{x},t) = \nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) - m^2\phi(\boldsymbol{x},t),$$

亦即

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0, \qquad (3.26)$$

表明场算符 $\phi(x)$满足克莱因-戈尔登方程.

3.2.3 时空空间的场算符

如第1章所述,克莱因-戈尔登方程有正能解与负能解[参见(1.5)与(1.6)式]

$$\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}k\cdot x}, \quad k\cdot x = \omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2+m^2}, \qquad (3.27)$$

由它们的线性叠加,就构成算符克莱因-戈尔登方程(3.26)的一般解

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + a^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}], \qquad (3.28)$$

显然 $\phi^\dagger(x)=\phi(x)$,所以 $\phi(x)$为厄米算符,其中的展开系数 $a(k)$与 $a^\dagger(k)$为动量空间的场算符.与(1.7)式一样,定义平面波因子

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},$$

则(3.28)式可写成

$$\phi(x) = \sum_{\boldsymbol{k}} [a(k)f_k(x) + a^\dagger(k)f_k^*(x)], \qquad (3.29)$$

(3.29)式即为实标量场算符在时空空间的表达式,而与之共轭的正则动量算符为

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}[a(k)\dot{f}_k(x)+a^\dagger(k)\dot{f}_k^*(x)], \tag{3.30}$$

两者满足对易关系(3.23)式.

3.2.4 动量空间的场算符

由(3.29)式可以证明,该式中的展开系数,即动量空间的场算符为

$$\begin{aligned} a(k)&=\int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\mathrm{d}^3x,\\ a^\dagger(k)&=\int \phi(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x. \end{aligned} \tag{3.31}$$

二者满足对易关系

$$\begin{aligned} &[a(k),a^\dagger(k')]=\delta_{\boldsymbol{kk'}},\\ &[a(k),a(k')]=0,\quad [a^\dagger(k),a^\dagger(k')]=0. \end{aligned} \tag{3.32}$$

而(3.20)与(3.21)式的哈密顿与动量算符在动量空间中的表达式为

$$\begin{aligned} H&=\sum_{\boldsymbol{k}}\omega\left[a^\dagger(k)a(k)+\frac{1}{2}\right],\\ \boldsymbol{p}&=\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}a^\dagger(k)a(k). \end{aligned} \tag{3.33}$$

下面来证明以上诸式.

例 3.1 证明(3.31)式.

证明 以 $f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0$ 左乘(3.29)式并积分,注意到平面波因子 $f_k(x)$ 的正交归一关系(1.8)与(1.9)式,即

$$\begin{aligned} &\int_V f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x=\delta_{\boldsymbol{kk'}},\quad \int_V f_k(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x=0,\\ &\int_V f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(x)\mathrm{d}^3x=0,\quad a\overleftrightarrow{\partial}_0 b=a\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}b, \end{aligned} \tag{3.34}$$

则有

$$\begin{aligned} &\int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\mathrm{d}^3x\\ &=\sum_{\boldsymbol{k'}}\left[a(k')\int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)\mathrm{d}^3x+a^\dagger(k')\int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}^*(x)\mathrm{d}^3x\right]\\ &=\sum_{\boldsymbol{k'}}a(k')\delta_{\boldsymbol{kk'}}=a(k),\Rightarrow \text{(3.31)第 1 式得证.} \end{aligned}$$

再以 $\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)$ 右乘(3.29)式并积分得

$$\int \phi(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x$$

$$= \sum_{k'}[a(k')\int f_{k'}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x + a^\dagger(k')\int f_{k'}^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x]$$

$$= \sum_{k'}a^\dagger(k')\delta_{\boldsymbol{kk'}} = a^\dagger(k), \Rightarrow$$ (3.31)第 2 式得证.

例 3.2 证明(3.32)式.

证明 由(3.31)式知

$$[a(k), a^\dagger(k')]$$

$$= \int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'[f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x), \phi(x')\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x')]_{t=t'}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'[f_k^*(x)\dot{\phi}(x) - \dot{f}_k^*(x)\phi(x), \phi(x')\dot{f}_{k'}(x') - \dot{\phi}(x')f_{k'}(x')]_{t=t'}$$

$$= -\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\{f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')[\dot{\phi}(\boldsymbol{x},t), \phi(\boldsymbol{x}',t)] + \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')[\phi(\boldsymbol{x},t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)]\}$$

$$= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'[f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') - \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]$$

$$= \int \mathrm{d}^3x f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x) = \delta_{\boldsymbol{kk'}}, \Rightarrow$$ (3.32)第 1 式得证.

同样的方法可以证明其他两式.

例 3.3 证明(3.33)式.

证明 将(3.29)与(3.30)式中的 $\phi(x)$ 与 $\pi(x)$ 代入(3.20)式得

$$H = \frac{1}{2}\int\{\pi^2(x) + [\boldsymbol{\nabla}\phi(x)]^2 + m^2\phi^2(x)\}\mathrm{d}^3x$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\sum_{\boldsymbol{kk'}}\{[a(k)\dot{f}_k(x) + a^\dagger(k)\dot{f}_k^*(x)][a(k')\dot{f}_{k'}(x) + a^\dagger(k')\dot{f}_{k'}^*(x)]$$
$$+ [a(k)\boldsymbol{\nabla}f_k(x) + a^\dagger(k)\boldsymbol{\nabla}f_k^*(x)]\cdot[a(k')\boldsymbol{\nabla}f_{k'}(x) + a^\dagger(k')\boldsymbol{\nabla}f_{k'}^*(x)]$$
$$+ m^2[a(k)f_k(x) + a^\dagger(k)f_k^*(x)][a(k')f_{k'}(x) + a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\sum_{\boldsymbol{kk'}}\{(-\omega\omega')[a(k)f_k(x) - a^\dagger(k)f_k^*(x)][a(k')f_{k'}(x) - a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)]$$
$$+ (-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')[a(k)f_k(x) - a^\dagger(k)f_k^*(x)][a(k')f_{k'}(x) - a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)]$$
$$+ m^2[a(k)f_k(x) + a^\dagger(k)f_k^*(x)][a(k')f_{k'}(x) + a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)]\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3x\sum_{\boldsymbol{kk'}}\{(-\omega\omega' - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)[a(k)a(k')f_k(x)f_{k'}(x)$$
$$+ a^\dagger(k)a^\dagger(k')f_k^*(x)f_{k'}^*(x)]$$
$$+ (\omega\omega' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)[a(k)a^\dagger(k')f_k(x)f_{k'}^*(x) + a^\dagger(k)a(k')f_k^*(x)f_{k'}(x)]\},$$

注意到

$$\int \mathrm{d}^3 x f_k^*(x) f_{k'}(x) = \frac{1}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'},$$
$$\int \mathrm{d}^3 x f_k(x) f_{k'}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}, \tag{3.35}$$

得

$$H = \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\left\{(-\omega\omega' - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)\left[a(k)a(k')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\right]\right.$$
$$\left. + (\omega\omega' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)\left[a(k)a^\dagger(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} + a^\dagger(k)a(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\right]\right\}$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\omega}{2}[a(k)a^\dagger(k) + a^\dagger(k)a(k)]$$
$$\xlongequal{(3.32)\text{式}} \sum_{\boldsymbol{k}}\omega\left[a^\dagger(k)a(k) + \frac{1}{2}\right], \Rightarrow (3.33)\text{第 1 式得证.}$$

将(3.29)的 $\phi(x)$ 代入(3.21)式得

$$\boldsymbol{p} = -\int \dot{\phi}\,\boldsymbol{\nabla}\phi\,\mathrm{d}^3 x$$
$$= -\int \mathrm{d}^3 x\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}[a(k)\dot{f}_k(x) + a^\dagger(k)\dot{f}_k^*(x)][a(k')\boldsymbol{\nabla}f_{k'}(x) + a^\dagger(k')\boldsymbol{\nabla}f_{k'}^*(x)]$$
$$= -\int \mathrm{d}^3 x\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}(\omega\boldsymbol{k}')[a(k)f_k(x) - a^\dagger(k)f_k^*(x)][a(k')f_{k'}(x) - a^\dagger(k')f_{k'}^*(x)]$$
$$= -\int \mathrm{d}^3 x\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}(\omega\boldsymbol{k}')[a(k)a(k')f_k(x)f_{k'}(x) + a^\dagger(k)a^\dagger(k')f_k^*(x)f_{k'}^*(x)$$
$$- a(k)a^\dagger(k')f_k(x)f_{k'}^*(x) - a^\dagger(k)a(k')f_k^*(x)f_{k'}(x)]$$
$$= -\sum_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}(\omega\boldsymbol{k}')\left[a(k)a(k')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'} + a^\dagger(k)a^\dagger(k')\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\right.$$
$$\left. - a(k)a^\dagger(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} - a^\dagger(k)a(k')\frac{1}{2\omega}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\right]$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{k}}{2}[a(k)a^\dagger(k) + a^\dagger(k)a(k) + a(k)a(\omega,-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t} + a^\dagger(k)a^\dagger(\omega,-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}],$$

由于对 $\boldsymbol{k}$ 的求和包括 $\pm\boldsymbol{k}$,故

$$\sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k} = 0,$$

另

$$a(k)a(\omega,-\boldsymbol{k}) = a(\omega,-\boldsymbol{k})a(k), \quad a^\dagger(k)a^\dagger(\omega,-\boldsymbol{k}) = a^\dagger(\omega,-\boldsymbol{k})a^\dagger(k),$$

故上式变为

$$\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\boldsymbol{k}}{2}[a(k)a^\dagger(k) + a^\dagger(k)a(k)] = \sum_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{k}a^\dagger(k)a(k), \Rightarrow (3.33)\text{第 2 式得证.}$$

3.2.5 粒子的产生与湮灭、粒子的真空正能量及粒子能量的正定性

在(3.33)式中,场的能量与动量都包含有算符

$$N(k)=a^\dagger(k)a(k), \tag{3.36}$$

因此取 N 对角化的表象,令

$$N|n\rangle=n|n\rangle, \tag{3.37}$$

其中,$|n\rangle$是算符 N 的本征值为 n 的本征态.

由 a 与 $a^\dagger$ 的对易关系,可求出 N 和 a、$a^\dagger$ 的对易关系

$$[N, a^\dagger]=[a^\dagger a, a^\dagger]=a^\dagger[a, a^\dagger]+[a^\dagger, a^\dagger]a,$$

亦即

$$[N, a^\dagger]=a^\dagger, \tag{3.38}$$

$$[N, a]=[a^\dagger a, a]=[a^\dagger, a]a+a^\dagger[a, a],$$

亦即

$$[N, a]=-a, \tag{3.39}$$

这样

$$\begin{aligned}Na^\dagger|n\rangle&=(a^\dagger+a^\dagger N)|n\rangle=(n+1)a^\dagger|n\rangle,\\ Na|n\rangle&=(-a+aN)|n\rangle=(n-1)a|n\rangle.\end{aligned} \tag{3.40}$$

由此可见,若$|n\rangle$是算符 N 的本征值为 n 的本征态,则 $a^\dagger|n\rangle$也是 N 的本征态,本征值为 $n+1$;同样 $a|n\rangle$也是 N 的本征态,本征值为 $n-1$. 因此,$a^\dagger$ 是产生一个粒子的算符,称为产生算符,a 是消灭一个粒子的算符,称为消灭算符. 若用$|0\rangle$表示一个粒子也没有的真空态,则应有

$$a|0\rangle=0,$$

而

$$a^\dagger(k)|0\rangle,\quad a^{\dagger2}(k)|0\rangle,\quad a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle, \tag{3.41}$$

分别是一个四维动量为 k,或能量为 ω、三维动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子态;两个四维动量都为 k 的粒子态;一个粒子的四维动量为 k_1、另一个粒子的四维动量为 k_2 的两个粒子态. 由此可见,量子化后的场可以对粒子的产生与湮灭现象给出很自然的描述.

由$|n\rangle$、$a^\dagger$ 与 a 可构成算符 N 的本征态序列,其本征值依次差 1

$$\cdots,\ a^2|n\rangle,\ a|n\rangle,\ |n\rangle,\ a^\dagger|n\rangle,\ a^{\dagger2}|n\rangle,\ \cdots,$$

$$\cdots,\ \ n-2,\ \ n-1,\ \ \ n,\ \ n+1,\ \ n+2,\ \cdots,$$

设$|n\rangle$是归一的,即$\langle n|n\rangle=1$,则

$$n=\langle n|a^\dagger a|n\rangle=|a|n\rangle|^2\geqslant 0,$$

这表明,N 的本征值 n 是正定的,因此 n 的取值应为

$$n=0,1,2,\cdots,$$

即 n 应为一系列正整数,这样算符 $N(k)=a^{\dagger}(k)a(k)$ 的意义就明了了:它是动量为 k 的粒子数算符.

由(3.33)式知,场的能量或动量是不同粒子的能量或动量的叠加,两者的取值是不连续的.由于粒子数算符 $N(k)=a^{\dagger}(k)a(k)$ 本征值的正定性,能量 H 的本征值是正定的,因此量子化后,原来经典克莱因-戈尔登场的负能量问题不复存在了.由该式还可以看出,对于一个粒子也不存在的真空态,场的动量为零,但其能量为 $\sum_k(\omega/2)\neq 0$,所以真空储存有能量,且是正的.由后面的讨论可知,不但实标量场,其他场,如复标量场、狄拉克场与电磁场也存在真空能量,真空能量是量子场的一个基本属性.

3.3　复标量场的量子化

实标量场因其实数性,即 $\phi^*=\phi$,不存在守恒荷,所以量子化后,它只能描述内部相加性守恒量为零的中性介子,即只能描述没有电荷、没有奇异数等的无荷介子.有荷介子需用复标量场,即 $\phi^*\neq\phi$ 的场来描述.

3.3.1　经典场

经典复标量场的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi,$$

正则坐标有 $\phi(x)$ 与 $\phi^*(x)$ 两个,相应的正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}}=\dot{\phi}^*(x),\quad \pi^*(x)=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\phi}^*}=\dot{\phi}(x),\tag{3.42}$$

按照(2.36)或(3.16)式,场的哈密顿量为

$$H=\int(\dot{\phi}^*\dot{\phi}+\nabla\phi^*\cdot\nabla\phi+m^2\phi^*\phi)\mathrm{d}^3x=\int(\pi\dot{\phi}+\pi^*\dot{\phi}^*-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x,\tag{3.43}$$

由(2.37)式,场的动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int(\dot{\phi}^*\nabla\phi+\dot{\phi}\nabla\phi^*)\mathrm{d}^3x=-\int(\pi\nabla\phi+\pi^*\nabla\phi^*)\mathrm{d}^3x,\tag{3.44}$$

由(2.137)或(2.139)式,场的守恒荷为

$$Q=-\mathrm{i}\int(\dot{\phi}^*\phi-\dot{\phi}\phi^*)\mathrm{d}^3x=-\mathrm{i}\int(\pi\phi-\pi^*\phi^*)\mathrm{d}^3x.\tag{3.45}$$

3.3.2　量子化

将正则坐标 $\phi(x)$、$\phi^*(x)$ 与正则动量 $\pi(x)$、$\pi^*(x)$ 看成算符,且满足正则对易关系

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \phi(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\pi(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=0. \tag{3.46}$$

$$[\phi^*(\boldsymbol{x},t),\ \pi^*(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[\phi^*(\boldsymbol{x},t),\ \phi^*(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\pi^*(\boldsymbol{x},t),\ \pi^*(\boldsymbol{x}',t)]=0. \tag{3.47}$$

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \phi^*(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\phi(\boldsymbol{x},t),\ \pi^*(\boldsymbol{x}',t)]=0,$$
$$[\pi(\boldsymbol{x},t),\ \pi^*(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\phi^*(\boldsymbol{x},t),\ \pi(\boldsymbol{x}',t)]=0. \tag{3.48}$$

运动方程为

$$\dot{\phi}=\mathrm{i}[H,\ \phi],\quad \dot{\pi}=\mathrm{i}[H,\ \pi]\quad 或\quad \ddot{\phi}^*=\mathrm{i}[H,\ \dot{\phi}^*],$$
$$\dot{\phi}^*=\mathrm{i}[H,\ \phi^*],\quad \dot{\pi}^*=\mathrm{i}[H,\ \pi^*]\quad 或\quad \ddot{\phi}=\mathrm{i}[H,\ \dot{\phi}]. \tag{3.49}$$

将(3.43)式中的 H 代入(3.49)式中 $\ddot{\phi}$ 的运动方程得

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\,[\dot{\phi}^*(x')\dot{\phi}(x')+\nabla'\phi^*(x')\cdot\nabla'\phi(x')+m^2\phi^*(x')\phi(x'),\ \dot{\phi}(x)]_{t=t'}\\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\,[\pi(x')\pi^*(x')+\nabla'\phi^*(x')\cdot\nabla'\phi(x')+m^2\phi^*(x')\phi(x'),\ \pi^*(x)]_{t=t'}\\
&= \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\,\{\nabla'\phi(x')\cdot\nabla'[\phi^*(x'),\ \pi^*(x)]_{t=t'}+m^2\phi(x')[\phi^*(x'),\ \pi^*(x)]_{t=t'}\}\\
&= -\int \mathrm{d}^3x'\,[\nabla'\phi(x')\cdot\nabla'\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})+m^2\phi(x')\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})]_{t=t'}\\
&\xlongequal{(3.25)式} \nabla^2\phi(x)-m^2\phi(x),\end{aligned}$$

亦即

$$(\partial_t^2-\nabla^2+m^2)\phi(x)=0,\quad 或\quad (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\phi(x)=0, \tag{3.50}$$

表明场算符 $\phi(x)$ 满足克莱因-戈尔登方程.

3.3.3　时空空间的场算符

像实标量场一样,满足(3.50)式的复标量场也有平面波解,正、负能量的平面波叠加可得一般解

$$\phi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],$$
$$\phi^*(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+b(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}]. \tag{3.51a}$$

与实标量场不同,展开系数除了 $a(k)$ 与 $a^\dagger(k)$ 外,还有 $b(k)$ 与 $b^\dagger(k)$,它们都是动量空间的场算符.引入如(1.7)式所示的平面波因子 $f_k(x)$,(3.51a)式可以写成

$$\phi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}[a(k)f_k(x)+b^\dagger(k)f_k^*(x)],$$
$$\phi^*(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}[a^\dagger(k)f_k^*(x)+b(k)f_k(x)]. \tag{3.51b}$$

与之共轭的正则动量算符为

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \dot{\phi}^*(x) = \sum_k [a^\dagger(k)\dot{f}_k^*(x) + b(k)\dot{f}_k(x)],\\ \pi^*(x) &= \dot{\phi}(x) = \sum_k [a(k)\dot{f}_k(x) + b^\dagger(k)\dot{f}_k^*(x)].\end{aligned} \tag{3.52}$$

它们满足(3.46)～(3.48)式的对易关系.

3.3.4 动量空间的场算符

用与实标量场中同样的方法可证明(参见例 3.1～例 3.3),(3.51)式中的展开系数,即动量空间的场算符为

$$\begin{aligned}a(k) &= \int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi(x)\mathrm{d}^3x,\\ a^\dagger(k) &= \int \phi^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x,\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}b(k) &= \int f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\phi^*(x)\mathrm{d}^3x,\\ b^\dagger(k) &= \int \phi(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x.\end{aligned} \tag{3.54}$$

它们满足对易关系

$$\begin{aligned}&[a(k), a^\dagger(k')] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'},\\ &[a(k), a(k')] = 0, \quad [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0.\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}&[b(k), b^\dagger(k')] = \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'},\\ &[b(k), b(k')] = 0, \quad [b^\dagger(k), b^\dagger(k')] = 0.\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}&[a(k), b(k')] = 0,\\ &[a(k), b^\dagger(k')] = 0, \quad [a^\dagger(k), b(k')] = 0.\end{aligned} \tag{3.57}$$

而场的能量、动量及守恒荷算符的动量函数表示为

$$\begin{aligned}H &= \sum_k \omega[a^\dagger(k)a(k) + b^\dagger(k)b(k) + 1],\\ \boldsymbol{p} &= \sum_k \boldsymbol{k}[a^\dagger(k)a(k) + b^\dagger(k)b(k)],\\ Q &= \sum_k [a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)].\end{aligned} \tag{3.58}$$

例 3.4 证明(3.58)式中守恒荷 Q 的表达式.

证明 作为例子,这里将给出(3.58)式中守恒荷 Q 的证明,其他各式的证明,方法类同,可参考例 3.1～例 3.3 及本例的方法自证之.

将(3.51b)代入(3.45)式得

$$Q=-\mathrm{i}\int(\dot{\phi}^{*}\phi-\dot{\phi}\phi^{*})\mathrm{d}^{3}x$$
$$=\sum_{kk'}\int\mathrm{d}^{3}x\{\omega[a^{\dagger}(k)f_{k}^{*}(x)-b(k)f_{k}(x)][a(k')f_{k'}(x)+b^{\dagger}(k')f_{k'}^{*}(x)]$$
$$+\omega'[a(k')f_{k'}(x)-b^{\dagger}(k')f_{k'}^{*}(x)][a^{\dagger}(k)f_{k}^{*}(x)+b(k)f_{k}(x)]\}.$$

展开上式,并利用平面波因子的积分关系(3.35)得

$$Q=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}}[a^{\dagger}(k)a(k)+a^{\dagger}(k)b^{\dagger}(\omega,-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}-b(k)a(\omega,-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}-b(k)b^{\dagger}(k)$$
$$+a(k)a^{\dagger}(k)+a(\omega,-\boldsymbol{k})b(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}-b^{\dagger}(\omega,-\boldsymbol{k})a^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}-b^{\dagger}(k)b(k)],$$

再利用(3.55)~(3.57)式的对易关系,即可得(3.58)式中 Q 的表达式.

3.3.5　粒子的产生与湮灭、粒子的真空正能量及粒子能量的正定性

对于复标量场,其动量空间的算符 $a^{\dagger}(k)$、$a(k)$、$b^{\dagger}(k)$ 及 $b(k)$ 满足对易关系(3.55)~(3.57)式,与实标量场动量函数算符 $a^{\dagger}(k)$、$a(k)$ 满足的对易关系(3.32)式一样.另外,它们的守恒量 H、$\boldsymbol{p}$ 及 Q 的形式也和实标量场(3.33)式一样,因此它们具有相同的物理意义.注意到(3.58)式 Q 中的算符 $a^{\dagger}(k)a(k)$ 和 $b^{\dagger}(k)b(k)$ 有不同的符号,表明相应的粒子带有不同符号的荷.所以,通常将 $a^{\dagger}(k)$、$a(k)$ 与 $N(k)=a^{\dagger}(k)a(k)$ 分别称为四维动量为 k,或能量为 ω、三维动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子的产生算符、消灭算符与粒子数算符.将 $b^{\dagger}(k)$、$b(k)$ 与 $\overline{N}(k)=b^{\dagger}(k)b(k)$ 分别称为反粒子的产生算符、消灭算符与粒子数算符.

与实标量场一样,若用 $|0\rangle$ 表示真空态,则

$$a|0\rangle=0,\quad b|0\rangle=0,$$

而

$$a^{\dagger n}(k)|0\rangle,\quad b^{\dagger n}(k)|0\rangle,\quad a^{\dagger}(k_{1})b^{\dagger}(k_{2})|0\rangle,\tag{3.59}$$

分别是 n 个四维动量为 k 的粒子态;n 个四维动量为 k 的反粒子态;一个四维动量为 k_1 的粒子与另一个四维动量为 k_2 的反粒子组成的正反粒子态.

由(3.58)式知,与实标量场一样,复标量场也存在着真空正能量,且由于粒子数算符 $N(k)=a^{\dagger}(k)a(k)$ 与 $\overline{N}(k)=b^{\dagger}(k)b(k)$ 只能取一系列正整数,能量 $H>0$,所以量子化后,复标量场的负能量困难也被消除掉了.

3.4　狄拉克场的量子化

标量场是自旋为零的介子场,服从玻色-爱因斯坦统计,一个量子态上可以同时拥有任意多个玻色子.正则量子化后,通过对易关系(3.23)或(3.46)~(3.48)的假设,得到了结果(3.41)或(3.59)式,这两式表明:任意多个介子确实可以同时处在同一个量子态上,从而保证了玻色-爱因斯坦统计的实现.狄拉克场是自旋为 1/2 的粒

子的场，服从费米-狄拉克统计，一个量子态上最多只能拥有一个费米子，正则量子化后，量子化的场应能反应这一物理事实.

3.4.1　经典场

经典狄拉克场是如(1.49)所示的平面波，如那里所述，在动量空间它是 4 分量或 3/2 阶旋量波函数，在时空空间是单分量或 0 阶旋量波函数，是一标量函数. 在洛伦兹变换下，它按(2.75)式即 $\psi'(x')=\Lambda(a)\psi(x)$变换，所以与标量场不同，它不是洛伦兹标量，由 2.7 节的讨论知，双旋量 $\bar{\psi}(x)\psi(x)$才是洛伦兹标量. 该场的拉格朗日密度由(2.10)式给出，为

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}=\bar{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi(x),$$

正则坐标为 $\psi(x)$，相应的正则动量为

$$\pi(x)=\frac{\partial\boldsymbol{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^{\dagger}(x),\tag{3.60}$$

由于$\boldsymbol{\mathcal{L}}$中不含有$\bar{\psi}(x)$的导数，所以$\bar{\psi}(x)$不是正则坐标. 按照(2.39)或(3.16)式，场的哈密顿量为

$$H=\int\psi^{\dagger}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi\mathrm{d}^{3}x=\int(\pi\dot{\psi}-\boldsymbol{\mathcal{L}})\mathrm{d}^{3}x,\tag{3.61}$$

由(2.40)式，场的动量为

$$\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\int\psi^{\dagger}\,\boldsymbol{\nabla}\psi\mathrm{d}^{3}x=-\int\pi\,\boldsymbol{\nabla}\psi\mathrm{d}^{3}x,\tag{3.62}$$

由(2.140)式，场的守恒荷为

$$Q=\int\psi^{\dagger}\psi\,\mathrm{d}^{3}x=-\mathrm{i}\int\pi\,\psi\mathrm{d}^{3}x.\tag{3.63}$$

3.4.2　量子化

把 $\psi(x)$与 $\pi(x)=\mathrm{i}\psi^{\dagger}(x)$看成算符，并要求它们满足一定的对易关系，即可完成正则量子化.

显然，如果将对易关系取成与标量粒子相同的形式，如(3.23)或(3.46)～(3.48)式，将有结果(3.41)或(3.59)式，即一个量子态上将同时拥有任意多个粒子，这将与费米-狄拉克统计相悖，违背泡利不相容原理. 所以狄拉克场的量子化须另想办法，该办法就是将 $\psi(x)$与 $\pi(x)$取成如下对易关系

$$\begin{aligned}&\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\&\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\ \psi_{\beta}(\boldsymbol{x},t)\}=0,\quad\{\psi_{\alpha}^{\dagger}(\boldsymbol{x},t),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)\}=0.\end{aligned}\tag{3.64}$$

与(3.23)或(3.46)～(3.48)式的差别仅在于将对易子$[A,\ B]=AB-BA$ 换成反对易子$\{A,\ B\}=AB+BA$. 这差别是唯一的，也是十分关键的，由此得到的结论是大不相同的. 由于(3.61)式的场能量算符包含两个费米子算符的乘积，相当于一个玻色子

算符,故算符的运动方程保持不变,即

$$\dot{\psi}=\mathrm{i}[H,\ \psi],\quad \dot{\psi}^{\dagger}=\mathrm{i}[H,\ \psi^{\dagger}],\tag{3.65}$$

将 H 的表达式(3.61)代入上式得

$$\dot{\psi}(\boldsymbol{x},t)=\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'[\psi^{\dagger}(x')(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+\beta m)\psi(x'),\ \psi(x)]_{t=t'},$$

利用(2.87)式,即

$$[AB,\ C]=A\{B,\ C\}-\{A,\ C\}B,\tag{3.66}$$

上式可以写成

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)=&\ \mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'[\psi_{\sigma}^{\dagger}(x')(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+\beta m)^{\sigma\rho}\{\psi_{\rho}(x'),\ \psi_{\alpha}(x)\}\\ &-\{\psi_{\sigma}^{\dagger}(x'),\ \psi_{\alpha}(x)\}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+\beta m)^{\sigma\rho}\psi_{\rho}(x')]_{t=t'}\\ =&-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^3x'\delta_{\sigma\alpha}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}'+\beta m)^{\sigma\rho}\psi_{\rho}(x')\Big|_{t=t'},\end{aligned}$$

因此得

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)=(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi(x),$$

亦即

$$(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi=0,\tag{3.67}$$

这就是我们熟知的狄拉克方程,它现在是算符运动方程.

3.4.3　时空空间的场算符

算符狄拉克方程(3.67)有正能解与负能解[参见(1.24)式]

$$\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}p\cdot x},\ p\cdot x=Et-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x},\quad E=\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2},$$

一般解由其叠加而成,即

$$\psi(x)=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[c(p,s)u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+d^{\dagger}(p,s)v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],\tag{3.68}$$

式中,$u(p,s)$是能量为E、动量为 $\boldsymbol{p}$、自旋为 s 的旋量波函数;$v(p,s)$是能量为$-E$,动量为$-\boldsymbol{p}$,自旋为 s 的波函数[参见(1.39)式].展开系数 $c(p,s)$与$d^{\dagger}(p,s)$是动量空间的场算符.

由(3.68)式得

$$\psi^{\dagger}(x)=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[c^{\dagger}(p,s)u^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+d(p,s)v^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}],\tag{3.69}$$

它与 $\psi(x)$间满足对易关系(3.64)式.

3.4.4　动量空间的场算符

利用 $u(p,s)$,$v(p,s)$的正交归一关系(1.45)～(1.47)式,及平面波因子的正交

归一关系

$$\frac{1}{V}\int e^{i(p-p')\cdot x}d^3x = \delta_{\boldsymbol{pp}'},$$
$$\frac{1}{V}\int e^{i(p+p')\cdot x}d^3x = e^{i2Et}\delta_{\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}'}. \tag{3.70}$$

可以证明,(3.68)式中的展开系数,即动量空间的场算符为

$$c(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ip\cdot x}u^{\dagger}(p,s)\psi(x)d^3x,$$
$$c^{\dagger}(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{-ip\cdot x}\psi^{\dagger}(x)u(p,s)d^3x. \tag{3.71}$$

$$d(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{ip\cdot x}\psi^{\dagger}(x)v(p,s)d^3x,$$
$$d^{\dagger}(p,s)=\sqrt{\frac{m}{VE}}\int e^{-ip\cdot x}v^{\dagger}(p,s)\psi(x)d^3x. \tag{3.72}$$

它们满足对易关系

$$\{c(p,s),\ c^{\dagger}(p',s')\}=\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'},$$
$$\{d(p,s),\ d^{\dagger}(p',s')\}=\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}. \tag{3.73}$$

$$\{c(p,s),\ d(p',s')\}=0,$$
$$\{c(p,s),\ d^{\dagger}(p',s')\}=0. \tag{3.74}$$

而狄拉克场的能量、动量及守恒荷在动量空间的表达式为

$$H = \sum_{\boldsymbol{p}s}E\,[c^{\dagger}(p,s)c(p,s)+d^{\dagger}(p,s)d(p,s)-1],$$
$$\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{p}s}\boldsymbol{p}\,[c^{\dagger}(p,s)c(p,s)+d^{\dagger}(p,s)d(p,s)], \tag{3.75}$$
$$Q = \sum_{\boldsymbol{p}s}[c^{\dagger}(p,s)c(p,s)-d^{\dagger}(p,s)d(p,s)].$$

例 3.5 证明(3.71)～(3.72)式.

证明 这里只给出第 1 式的证明,其他各式的证明方法类同,读者可自证之.

将(3.68)代入(3.71)第 1 式右边得

$$\sqrt{\frac{m}{VE}}\int d^3x e^{ip\cdot x}u^{\dagger}(p,s)\sum_{\boldsymbol{p}'s'}\sqrt{\frac{m}{VE'}}[c(p',s')u(p',s')e^{-ip'\cdot x}+d^{\dagger}(p',s')v(p',s')e^{ip'\cdot x}]$$

$$\xlongequal{(3.70)\text{式}}\sum_{\boldsymbol{p}'s'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}[c(p',s')u^{\dagger}(p,s)u(p',s')\delta_{\boldsymbol{pp}'}$$
$$+d^{\dagger}(p',s')u^{\dagger}(p,s)v(p',s')e^{i2Et}\delta_{\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}'}]$$

$$=\sum_{s'}\frac{m}{E}[c(p,s')u^{\dagger}(p,s)u(p,s')+d^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},s')u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')e^{i2Et}],$$

由(1.45)与(1.47)式知

$$u^{\dagger}(p,s)u(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'},\quad v^{\dagger}(p,s)v(p,s')=\frac{E}{m}\delta_{ss'},$$
$$v^{\dagger}(p,s)u(E,-\boldsymbol{p},s')=u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')=0. \tag{3.76}$$

代入上式即知(3.71)第1式右边等于 $c(p,s)$,与左边相等,证毕.

例 3.6 证明(3.73)～(3.74)式的反对易关系.

证明 将(3.71)代入(3.73)式得

$$\begin{aligned}
&\{c(p,s),\ c^{\dagger}(p',s')\}\\
&=\left\{\sqrt{\frac{m}{VE}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u^{\dagger}(p,s)\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x,\sqrt{\frac{m}{VE'}}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x'}\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)u(p',s')\mathrm{d}^3x'\right\}\\
&=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-p'\cdot x')}u_{\alpha}^{\dagger}(p,s)u_{\beta}(p',s')\{\psi^{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\ \psi^{\dagger\beta}(\boldsymbol{x}',t)\}\\
&=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x-p'\cdot x')}u_{\alpha}^{\dagger}(p,s)u_{\beta}(p',s')\delta^{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\
&=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p')\cdot x}u^{\dagger}(p,s)u(p',s')\\
&=\frac{m}{E}u^{\dagger}(p,s)u(p,s')\delta_{\boldsymbol{pp}'}\\
&\xlongequal{(3.76)\text{式}}\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}.
\end{aligned}$$

又如

$$\begin{aligned}
&\{c(p,s),\ d(p',s')\}\\
&=\left\{\sqrt{\frac{m}{VE}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}u^{\dagger}(p,s)\psi(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3x,\ \sqrt{\frac{m}{VE'}}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x'}\psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)v(p',s')\mathrm{d}^3x'\right\}\\
&=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+p'\cdot x')}u_{\alpha}^{\dagger}(p,s)v_{\beta}(p',s')\{\psi^{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\ \psi^{\dagger\beta}(\boldsymbol{x}',t)\}\\
&=\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\int \mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p\cdot x+p'\cdot x')}u_{\alpha}^{\dagger}(p,s)v_{\beta}(p',s')\delta^{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\\
&=\frac{m}{E}u^{\dagger}(p,s)v(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Et}\delta_{\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}'}\\
&=\frac{m}{E}u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Et}\\
&\xlongequal{(3.76)\text{式}}0.
\end{aligned}$$

同样的方法可证明其他各式,读者可自证之.

例 3.7 证明(3.75)式.

证明 将(3.68)与(3.69)代入(3.61)式得

$$
\begin{aligned}
H &= \int \psi^{\dagger}(x)(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi(x)\mathrm{d}^3x \\
&= \int \mathrm{d}^3x \sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c^{\dagger}(p,s)u^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+d(p,s)v^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&\quad\times(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\sum_{p's'}\sqrt{\frac{m}{VE'}}\left[c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x}+d^{\dagger}(p',s')v(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x \sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E'}{E}}\left[c^{\dagger}(p,s)u^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+d(p,s)v^{\dagger}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\right] \\
&\quad\times\left[c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x}-d^{\dagger}(p',s')v(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x}\right] \\
&= \int \mathrm{d}^3x \sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{V}\sqrt{\frac{E'}{E}}\left[c^{\dagger}(p,s)c(p',s')u^{\dagger}(p,s)u(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\right. \\
&\quad-c^{\dagger}(p,s)d^{\dagger}(p',s')u^{\dagger}(p,s)v(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}(p+p')\cdot x} \\
&\quad+d(p,s)c(p',s')v^{\dagger}(p,s)u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p+p')\cdot x} \\
&\quad\left.-d(p,s)d^{\dagger}(p',s')v^{\dagger}(p,s)v(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\right] \\
&= \sum_{ps}\sum_{p's'}m\left[c^{\dagger}(p,s)c(p',s')u^{\dagger}(p,s)u(p',s')\delta_{\boldsymbol{pp}'}\right. \\
&\quad-c^{\dagger}(p,s)d^{\dagger}(p',s')u^{\dagger}(p,s)v(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Et}\delta_{\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}'} \\
&\quad+d(p,s)c(p',s')v^{\dagger}(p,s)u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2Et}\delta_{\boldsymbol{p},-\boldsymbol{p}'} \\
&\quad\left.-d(p,s)d^{\dagger}(p',s')v^{\dagger}(p,s)v(p',s')\delta_{\boldsymbol{pp}'}\right] \\
&= \sum_{pss'}m\left[c^{\dagger}(p,s)c(p,s')u^{\dagger}(p,s)u(p,s')\right. \\
&\quad-c^{\dagger}(p,s)d^{\dagger}(E,-\boldsymbol{p},s')u^{\dagger}(p,s)v(E,-\boldsymbol{p},s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2Et} \\
&\quad+d(p,s)c(E,-\boldsymbol{p},s')v^{\dagger}(p,s)u(E,-\boldsymbol{p},s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2Et} \\
&\quad\left.-d(p,s)d^{\dagger}(p,s')v^{\dagger}(p,s)v(p,s')\right] \\
&\xlongequal{(3.76)\text{式}} \sum_{ps}E\left[c^{\dagger}(p,s)c(p,s)-d(p,s)d^{\dagger}(p,s)\right] \\
&= \sum_{ps}E\left[c^{\dagger}(p,s)c(p,s)+d^{\dagger}(p,s)d(p,s)-1\right].
\end{aligned}
$$

将算符$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)$换成动量算符$-\mathrm{i}\,\boldsymbol{\nabla}$,亦即在上述计算中,将$E$换成$\boldsymbol{p}$,其结果就是场的动量算符.去掉算符$(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)$,即在最后结果中去掉$E$,并将上面倒数第二个等号右边的第二项的“$-$”号变成“$+$”,就可以得到守恒荷的动量函数算符(注:对于所有正反粒子的荷,$\sum_{ps}1=0$).

3.4.5 狄拉克粒子的产生与湮灭及狄拉克粒子的真空负能量

在场的能量、动量及守恒荷的表达式中,场算符$c(p,s)$、$c^{\dagger}(p,s)$、$d(p,s)$及

$d^\dagger(p,s)$以组合

$$\begin{aligned}N(p,s)&=c^\dagger(p,s)c(p,s),\\ \overline{N}(p,s)&=d^\dagger(p,s)d(p,s)\end{aligned}\tag{3.77}$$

的形式出现,由对易关系(3.73)～(3.74)式可以证明

$$\begin{aligned}&[N,\ c^\dagger]=c^\dagger,\quad [N,\ c]=-c,\\ &[\overline{N},\ d^\dagger]=d^\dagger,\quad [\overline{N},\ d]=-d,\\ &N^2=N,\quad \overline{N}^2=\overline{N}.\end{aligned}\tag{3.78}$$

例如

$$\begin{aligned}&[N,\ c^\dagger]=c^\dagger cc^\dagger-c^\dagger c^\dagger c\overset{c^\dagger c^\dagger=0}{=\!=\!=}c^\dagger cc^\dagger=c^\dagger(1-c^\dagger c)=c^\dagger,\\ &[N,\ c]=c^\dagger cc-cc^\dagger c\overset{cc=0}{=\!=\!=}-cc^\dagger c=-c(1-cc^\dagger)=-c,\\ &N^2=c^\dagger cc^\dagger c=c^\dagger(1-c^\dagger c)c=c^\dagger c=N.\end{aligned}$$

在 N 和 $\overline{N}$ 的对角表象中,令

$$N|n\rangle=n|n\rangle,\quad \overline{N}|\overline{n}\rangle=\overline{n}|\overline{n}\rangle,$$

则

$$N^2|n\rangle=N|n\rangle,\quad \overline{N}^2|n\rangle=\overline{N}|n\rangle,$$

故

$$n^2=n,\ \Rightarrow\ n=0,1;\ \overline{n}^2=\overline{n},\ \Rightarrow \overline{n}=0,1.$$

即 N 或 $\overline{N}$ 的本征值只有两个:一个为0,另一个为1,表明一个量子态上最多只能容纳一个粒子,从而解决了本节开始我们所关心的自旋与统计的关系问题,使得泡利不相容原理得以实现.又

$$\begin{aligned}Nc^\dagger|n\rangle&=(c^\dagger+c^\dagger N)|n\rangle=(n+1)c^\dagger|n\rangle,\\ Nc|n\rangle&=(-c+cN)|n\rangle=(n-1)c|n\rangle.\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\overline{N}d^\dagger|\overline{n}\rangle&=(\overline{n}+1)d^\dagger|\overline{n}\rangle,\\ \overline{N}d|\overline{n}\rangle&=(\overline{n}-1)d|\overline{n}\rangle.\end{aligned}$$

由此可见,$c^\dagger(p,s)$、$c(p,s)$与 $N(p,s)$分别是粒子的产生、消灭与粒子数算符.而 $d^\dagger(p,s)$、$d(p,s)$与 $\overline{N}(p,s)$分别是反粒子的产生、消灭与粒子数算符.正反粒子的差别仅在于它们的守恒荷差了一个符号.由(3.75)式知,与标量玻色子场不同,狄拉克场的真空能量是负的,这与第1章中狄拉克的负能真空假设是相一致的.

3.5 库仑规范下电磁场的量子化

描述电磁场的基本量是电磁场张量 $F_{\mu\nu}$,它具有规范变换不变性[参见(1.98)式

及其后面的讨论],从而使得我们可以选取适当的规范条件以达到简化问题处理的目的.但规范条件却对电磁场的量子化造成了一定的困难.本节先讨论库仑规范下电磁场的量子化,消除光子的负能问题.

3.5.1 经典场

在库仑规范下,$A_0=0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\partial_i A^i=0$,电磁场的拉格朗日密度由(2.42)式给出

$$\mathscr{L}_A=-\frac{1}{2}\partial_i A_k\partial^i A^k-\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i,$$

则正则坐标为 A^i,正则动量为

$$\pi_i=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{A}^i}=-\dot{A}_i=\dot{A}^i, \tag{3.79}$$

按照(2.44)或(3.16)式,电磁场的能量为

$$H=\frac{1}{2}\int(\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}+\nabla A^i\cdot\nabla A^i)\mathrm{d}^3x=\int(\pi_i\dot{A}^i-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x, \tag{3.80}$$

由(2.45)式,场的动量为

$$\boldsymbol{p}=-\int\dot{A}^i\ \nabla A^i\mathrm{d}^3x=-\int\pi_i\ \nabla A^i\mathrm{d}^3x, \tag{3.81}$$

由(2.138)式,电磁场的守恒荷为

$$\boldsymbol{Q}=0.$$

3.5.2 量子化

按照自旋为0的标量场的量子化方法,将正则坐标 $A^i(x)$和正则动量 $\pi_i(x)=\dot{A}^i(x)$看成算符,并使其满足对易关系

$$\begin{aligned}&[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\&[A^i(\boldsymbol{x},t),\ A^j(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad[\dot{A}^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=0,\end{aligned} \tag{3.82}$$

就完成了量子化.可是在这里却行不通,因为对上面第1式两边求导可得

$$\partial_i[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta^{ij}\partial_i\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

亦即

$$[\partial_i A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\partial^j\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

由于在库仑规范条件下,$\partial_i A^i=0$,故上式变为

$$0=\mathrm{i}\partial^j\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\neq0,$$

这显然是错误的.

之所以会出现这样的问题,是因为由于规范条件$\partial_i A^i=0$的采用,三对正则变量 A^i、$\pi_i=\dot{A}^i(i=1,2,3)$只有两对是独立的.而上述量子化方法只适用于正则变量是独

立的情况，对于非独立的正则变量，这种量子化方法，即(3.82)式须做些修改.为此将它们用两对独立的正则变量作展开

$$A^i(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}q_{k\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\sqrt{V}},$$
$$\pi_i(\boldsymbol{x},t)=\dot{A}^i(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}p_{k\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\sqrt{V}},\tag{3.83}$$

其中，$\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)(\lambda=1,2)$是(1.107)式引入的横极化矢量：$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)=0$，而展开系数 $q_{k\lambda}(t)$、$p_{k\lambda}(t)$ $(\lambda=1,2)$就是两对独立的正则算符，它们仅是时间 t 的函数，满足对易关系

$$[q_{k\lambda}(t),\ p_{k'\lambda'}(t)]=\mathrm{i}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},$$
$$[q_{k\lambda}(t),\ q_{k'\lambda'}(t)]=0,\quad [p_{k\lambda}(t),\ p_{k'\lambda'}(t)]=0.\tag{3.84}$$

显然，(3.83)式定义的 A^i 与 $\dot{A}^i$ 满足库仑规范条件

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}q_{k\lambda}(t)\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\sqrt{V}}=0,$$
$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}p_{k\lambda}(t)(-\mathrm{i}\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\sqrt{V}}=0.$$

由(3.83)与(3.84)两式可导出正则变量 A^i，$\dot{A}^i$ 满足对易关系

$$[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[A^i(\boldsymbol{x},t),\ A^j(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\dot{A}^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=0.\tag{3.85}$$

对(3.85)第 1 式两边求偏导∂_i 得

$$\partial_i[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\partial_i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

如前所述，由于库仑规范条件，左边=0.而右边的

$$\partial_i\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)=\partial_j-\frac{\partial_i\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}=\partial_j+\partial^j=\partial_j-\partial_j=0,$$

所以对易关系(3.85)与库仑规范条件不矛盾.

像通常一样，正则坐标与正则动量满足运动方程

$$\dot{A}^i=\mathrm{i}[H,\ A^i],\quad \ddot{A}^i=\mathrm{i}[H,\ \dot{A}^i].\tag{3.86}$$

将 H 的(3.80)表达式代入(3.86)的第 2 式得

$$\begin{aligned}\ddot{A}^i(\boldsymbol{x},t)&=\mathrm{i}[H,\ \dot{A}^i(\boldsymbol{x},t)]\\&=\mathrm{i}\left[\frac{1}{2}\int[\dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)+\boldsymbol{\nabla}'A^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\boldsymbol{\nabla}'A^j(\boldsymbol{x}',t)]\mathrm{d}^3x',\ \dot{A}^i(\boldsymbol{x},t)\right]\\&=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x'\ \boldsymbol{\nabla}'A^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\boldsymbol{\nabla}'[A^j(\boldsymbol{x}',t),\ \dot{A}^i(\boldsymbol{x},t)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=-\int \mathrm{d}^3x'\ \boldsymbol{\nabla}' A^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\delta^{ij}-\frac{\partial'^i\partial'^j}{\boldsymbol{\nabla}'^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\
&=-\int \mathrm{d}^3x'\ \boldsymbol{\nabla}' A^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\
&=-\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\int \mathrm{d}^3x'\ \boldsymbol{\nabla}' A^j(\boldsymbol{x}',t)\cdot\boldsymbol{\nabla}'\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\
&\xlongequal{(3.25)\text{式}}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\boldsymbol{\nabla}^2 A^j\\
&=\boldsymbol{\nabla}^2 A^i,
\end{aligned}
$$

最后一等号用到了库仑规范条件$\partial_j A^j=0$. 上式移项得

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)A^i(\boldsymbol{x},t)=0,\quad \text{或}\quad \partial^\mu\partial_\mu \mathbf{A}=0, \tag{3.87}
$$

这就是场算符的波动方程,与库仑规范下的势方程相同[参见(1.100b)式].

例 3.8　证明(3.85)式.

证明　由(3.83)式知

$$
\begin{aligned}
&[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]\\
&=\left[\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}q_{k\lambda}(t)\varepsilon^i(k,\lambda)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\sqrt{V}},\ \sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}p_{k'\lambda'}(t)\varepsilon^j(k',\lambda')\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}'}}{\sqrt{V}}\right]\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')[q_{k\lambda}(t),\ p_{k'\lambda'}(t)]\\
&=\mathrm{i}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\\
&=\mathrm{i}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{V}\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda)\\
&\xlongequal{(1.110)\text{式}}\mathrm{i}\sum_{\boldsymbol{k}}\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|\boldsymbol{k}|^2}\right)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}}{V}\\
&=\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}\\
&=\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').
\end{aligned}
$$

这里,倒数第三行到倒数第二行,用到了关系

$$
\sum_{\boldsymbol{k}}\Rightarrow\int\frac{V\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3},\quad \text{或}\quad \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}, \tag{3.88}
$$

其中,$V\mathrm{d}^3k$ 是相空间的体积元,$h^3=(2\pi)^3\hbar^3=(2\pi)^3$ 是相格的体积,$V\mathrm{d}^3k/(2\pi)^3$ 是相格数,对相格的求和,在连续情况下就是对相空间的积分.

3.5.3　时空空间的场算符

(3.87)式是关于 $\mathbf{A}$ 的线性齐次方程,其解为如(1.117)式所示的平面波

$$\boldsymbol{A}_{k\lambda}^{\pm}(x)=\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}\quad(\lambda=1,2,3),$$

由其叠加,可得(3.87)式的一般解

$$\boldsymbol{A}(x)=\sum_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+a^{\dagger}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],\tag{3.89}$$

展开系数 $a(k,\lambda)$ 与 $a^{\dagger}(k,\lambda)$ 为在一定极化状态下动量空间的场算符. 引入如(1.7)式所示的平面波因子 $f_k(x)$,(3.89)式变为

$$\boldsymbol{A}(x)=\sum_{k\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)[a(k,\lambda)f_k(x)+a^{\dagger}(k,\lambda)f_k^{*}(x)],\tag{3.90}$$

与其相应的正则动量

$$\dot{\boldsymbol{A}}(x)=\sum_{k\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)[a(k,\lambda)\dot{f}_k(x)+a^{\dagger}(k,\lambda)\dot{f}_k^{*}(x)],\tag{3.91}$$

它与 $\boldsymbol{A}(x)$ 间满足对易关系(3.85)式.

3.5.4 动量、极化空间的场算符

由三维极化矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)$ 的正交归一关系(1.107)式,即

$$\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')=\delta_{\lambda\lambda'}\quad(\lambda,\lambda'=1,2,3),$$

与平面波因子 $f_k(x)$ 的正交归一关系(3.34),可得(3.90)式的逆变换

$$\begin{aligned}a(k,\lambda)&=\int f_k^{*}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}^3x,\\ a^{\dagger}(k,\lambda)&=\int\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{A}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k(x)\mathrm{d}^3x.\end{aligned}\tag{3.92}$$

二者是动量、极化空间的电磁场算符. 可以证明,二者满足对易关系

$$\begin{aligned}&[a(k,\lambda),\ a^{\dagger}(k',\lambda')]=\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'},\\ &[a(k,\lambda),\ a(k',\lambda')]=0,\quad[a^{\dagger}(k,\lambda),\ a^{\dagger}(k',\lambda')]=0.\end{aligned}\tag{3.93}$$

而电磁场的能量与动量的(3.80)与(3.81)两式,其动量、极化的函数形式为

$$\begin{aligned}H&=\sum_{k\lambda}\omega\left[a^{\dagger}(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\right],\\ \boldsymbol{p}&=\sum_{k\lambda}\boldsymbol{k}a^{\dagger}(k,\lambda)a(k,\lambda).\end{aligned}\tag{3.94}$$

例 3.9 证明(3.93)与(3.94)式.

证明 将(3.92)代入(3.93)式得

$$\begin{aligned}&[a(k,\lambda),\ a^{\dagger}(k',\lambda')]\\ =&\left[\int f_k^{*}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0\,\varepsilon^{i}(k,\lambda)A^{i}(x)\mathrm{d}^3x,\ \int\varepsilon^{j}(k',\lambda')A^{j}(x')\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x')\mathrm{d}^3x'\right]\\ =&-\int\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\varepsilon^{i}(k,\lambda)\varepsilon^{j}(k',\lambda')[f_k^{*}(x)\dot{A}^{i}(x)-\dot{f}_k^{*}(x)A^{i}(x),\end{aligned}$$

$$A^j(x')\dot{f}_{k'}(x')-\dot{A}^j(x')f_{k'}(x')]$$
$$=-\int d^3x d^3x'\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\{f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')[\dot{A}^i(\boldsymbol{x},t),A^j(\boldsymbol{x}',t)]$$
$$+\dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')[A^i(\boldsymbol{x},t),\dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]\}$$
$$=\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\int d^3x d^3x'[f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')-\dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')]\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$
$$=\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\int d^3x'\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\boldsymbol{\nabla}^2}\right)[f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')-\dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')]_{x=x'}$$
$$=\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k',\lambda')\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|k|^2}\right)\int d^3x f_k^*(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(x)$$
$$=\varepsilon^i(k,\lambda)\varepsilon^j(k,\lambda')\left(\delta^{ij}-\frac{k^ik^j}{|k|^2}\right)\delta_{\boldsymbol{kk}'},$$

在以上推导中,由第4到第5等式用到了含δ函数积分的(3.25)式.对于库仑规范,由(1.109)式知

$$\varepsilon^i(k,\lambda)k^i=\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{k}=0\quad(\lambda=1,2),$$

这样

$[a(k,\lambda),a^\dagger(k',\lambda')]=\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}=\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\boldsymbol{kk}'}$, ⇒ (3.93)第1式得证.
同样的方法可证明(3.93)式的其他两对易式.

将(3.90)代入(3.80)式得

$$H=\frac{1}{2}\int(\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{\nabla}A^i\cdot\boldsymbol{\nabla}A^i)d^3x$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\int d^3x(-\omega\omega'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')\varepsilon^i(k,\lambda)[a(k,\lambda)f_k(x)-a^\dagger(k,\lambda)f_k^*(x)]$$
$$\times\varepsilon^i(k',\lambda')[a(k',\lambda')f_{k'}(x)-a^\dagger(k',\lambda')f_{k'}^*(x)]$$
$$\overset{(3.35)式}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{(-\omega\omega'-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')}{2\omega}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda')$$
$$\times[a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}-a(k,\lambda)a^\dagger(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}$$
$$-a^\dagger(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}+a^\dagger(k,\lambda)a^\dagger(k',\lambda')e^{\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}],$$

对于光子,$|\boldsymbol{k}|=\omega$,则

$$H=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega\sum_{\lambda'}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda')+a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda')]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega\sum_{\lambda'}\delta_{\lambda\lambda'}[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda')+a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda')]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)+a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda)],$$

亦即

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega\left[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\right],\ \Rightarrow\ (3.94)第1式得证.$$

同理,将(3.90)代入(3.81)式得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} =& -\int \dot{A}^i\, \boldsymbol{\nabla} A^i \mathrm{d}^3 x \\
=& -\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\int \mathrm{d}^3 x \omega \boldsymbol{k}' \varepsilon^i(k,\lambda)\left[a(k,\lambda) f_k(x) - a^\dagger(k,\lambda) f_k^*(x)\right] \\
&\times \varepsilon^i(k',\lambda')\left[a(k',\lambda') f_{k'}(x) - a^\dagger(k',\lambda') f_{k'}^*(x)\right] \\
=& -\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'} \frac{\boldsymbol{k}'}{2} \boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k',\lambda') \\
&\times \left[a(k,\lambda)a(k',\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'} - a(k,\lambda)a^\dagger(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\right. \\
&\left. - a^\dagger(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} + a^\dagger(k,\lambda)a^\dagger(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}\right] \\
=& \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda') \\
&\times \left[a(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)a(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t} + a^\dagger(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)a^\dagger(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}\right] \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')\left[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda') + a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda')\right].
\end{aligned}
$$

如图 3.1 所示.



图 3.1　(a)三个相互正交的单位矢量;(b)动量反向后的三个相互正交的单位矢量

若 $\lambda\neq\lambda'$,$\boldsymbol{\varepsilon}(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')=0$;若 $\lambda=\lambda'$,由于对 $\boldsymbol{k}$ 的求和包括 $+\boldsymbol{k}$ 与 $-\boldsymbol{k}$ 两部分,而上式第一求和项中,$\boldsymbol{k}$ 后面的乘积因子对于 $+\boldsymbol{k}$ 与 $-\boldsymbol{k}$ 是相等的,故求和后为零. 这样

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} &= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'} \boldsymbol{k}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda')\left[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda') + a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda')\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'} \boldsymbol{k}\delta_{\lambda\lambda'}\left[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda') + a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda')\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda} \boldsymbol{k}\left[a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda) + a(k,\lambda)a^\dagger(k,\lambda)\right],
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\boldsymbol{p} = \sum_{\boldsymbol{k}\lambda} \boldsymbol{k} a^\dagger(k,\lambda)a(k,\lambda), \Rightarrow \text{(3.94)第 2 式得证.}
$$

3.5.5 光子的产生与湮灭、光子的真空正能量及光子能量的正定性

在动量、极化空间中,电磁场的场算符 $a^{\dagger}(k,\lambda)$ 和 $a(k,\lambda)$ 满足对易关系(3.93),并且以 $N(k,\lambda)=a^{\dagger}(k,\lambda)a(k,\lambda)$ 的形式出现在哈密顿与动量算符 H 和 $\boldsymbol{p}$ 中,所以与前面相似,将 $a^{\dagger}(k,\lambda)$、$a(k,\lambda)$ 与 $N(k,\lambda)$ 称为光子的产生、消灭与粒子数算符. 光子的能量 $\omega=|\boldsymbol{k}|$,动量为 $\boldsymbol{k}$,极化为 $\lambda=1,2$,即光子只有横向极化. (3.94)式表明,量子化后的电磁场,即光子也存在着真空能量,且是正的,再由于粒子数算符 $N(k,\lambda)=a^{\dagger}(k,\lambda)a(k,\lambda)$本征值的正定性知,量子化后光子的能量 $H>0$,经典电磁场的负能问题得以消除.

3.6 洛伦兹规范下电磁场的量子化

由上面的讨论知,库仑规范条件对电磁场的量子化带来了一定的麻烦,为了消除该麻烦,量子化条件,即正则变量的对易关系须做些改变,改变后的形式如(3.85)式所示,在该对易关系中,微分算符跑到了分母上,在形式上确实有点怪,但却很管用,解决了我们所遇到的问题,得到了正确的物理结果.

电磁场的另一常用规范条件是洛伦兹规范,本节将讨论该规范条件下电磁场的量子化问题.

3.6.1 经典场

在洛伦兹规范下,$\partial_{\mu}A^{\mu}=0$,其拉格朗日密度由(2.46)式给出,即

$$\mathcal{L}=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}=-\frac{1}{2}\dot{A}_{\nu}\dot{A}^{\nu}+\frac{1}{2}\nabla A_{\nu}\cdot\nabla A^{\nu}, \tag{3.95}$$

正则坐标为 A^{μ},正则动量为

$$\pi_{\mu}(x)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^{\mu}}=-\dot{A}_{\mu}. \tag{3.96}$$

按照(2.48)或(3.16)式,场的能量

$$H=-\frac{1}{2}\int(\dot{A}^{\mu}\dot{A}_{\mu}+\nabla A^{\mu}\cdot\nabla A_{\mu})\mathrm{d}^{3}x=\int(\pi^{\mu}\dot{A}_{\mu}-\mathcal{L})\mathrm{d}^{3}x, \tag{3.97}$$

由(2.49)式知,场的动量

$$\boldsymbol{p}=\int\dot{A}^{\mu}\,\nabla A_{\mu}\mathrm{d}^{3}x=-\int\pi^{\mu}\,\nabla A_{\mu}\mathrm{d}^{3}x. \tag{3.98}$$

3.6.2 量子化

将 A_{μ} 和 $\pi_{\mu}=-\dot{A}_{\mu}$ 作为正则共轭算符,且满足正则对易关系

$$[A_\mu(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$
$$[A_\mu(\boldsymbol{x},t),\ A_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\dot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=0, \tag{3.99}$$

就完成了正则量子化.

运动方程为

$$\dot{A}_\mu=\mathrm{i}[H,\ A_\mu],\quad \ddot{A}_\mu=\mathrm{i}[H,\ \dot{A}_\mu]. \tag{3.100}$$

将(3.97)式代入得

$$\begin{aligned}\ddot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)&=\mathrm{i}\left[-\frac{1}{2}\int[\dot{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t)\dot{A}^\nu(\boldsymbol{x}',t)+\nabla'A_\nu(\boldsymbol{x}',t)\cdot\nabla'A^\nu(\boldsymbol{x}',t)]\mathrm{d}^3x',\ \dot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)\right]\\&=-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^3x'\ \nabla'A^\nu(\boldsymbol{x}',t)\cdot\nabla'[A_\nu(\boldsymbol{x}',t),\ \dot{A}_\mu(\boldsymbol{x},t)]\\&=-g_{\mu\nu}\int\mathrm{d}^3x'\ \nabla'A^\nu(\boldsymbol{x}',t)\cdot\nabla'\delta^3(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x})\\&=\nabla^2A_\mu(\boldsymbol{x},t),\end{aligned}$$

亦即

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)A_\mu(\boldsymbol{x},t)=0,\ \Rightarrow\ \partial_\mu\partial^\mu A_\nu=0. \tag{3.101}$$

这就是四维电磁矢势,现在是算符的波动方程,与洛伦兹规范下的势方程相同[参见(1.102b)式].

3.6.3　时空空间的场算符

(3.101)式的波动方程有如(1.117)式所示的平面波解

$$A_{k\lambda}^{\mu\pm}(x)=\frac{\varepsilon^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}k\cdot x}\quad(\lambda=1,2,3,4),$$

诸平面波的叠加,就构成它的一般解

$$A_\mu(x)=\sum_{k\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}], \tag{3.102}$$

或引入如(1.7)式所示的平面波因子 $f_k(x)$,(3.102)式变为

$$A_\mu(x)=\sum_{k\lambda}e_\mu(k,\lambda)[a(k,\lambda)f_k(x)+\bar{a}(k,\lambda)f_k^*(x)], \tag{3.103}$$

其共轭动量算符为

$$\dot{A}_\mu(x)=\sum_{k\lambda}e_\mu(k,\lambda)[a(k,\lambda)\dot{f}_k(x)+\bar{a}(k,\lambda)\dot{f}_k^*(x)], \tag{3.104}$$

二者满足对易关系(3.99)式.

3.6.4　动量、极化空间的场算符

由四维极化矢量 $\varepsilon^\mu(k,\lambda)$ 的正交归一关系(1.113)式,即

$$e^{\mu}(k,\lambda)e_{\mu}(k,\lambda')=-\delta_{\lambda\lambda'}\quad(\lambda,\lambda'=1,2,3,4),$$

与平面波因子 $f_k(x)$ 的正交归一关系(3.34)式,可得(3.102)式的逆变换为

$$\begin{aligned}a(k,\lambda)&=\int e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k^*(x)\mathrm{d}^3x,\\\bar{a}(k,\lambda)&=\int f_k(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)\mathrm{d}^3x.\end{aligned}\tag{3.105}$$

二者是电磁场的动量、极化函数算符.

变写(3.105)式中的 $a(k,\lambda)$ 得

$$a(k,\lambda)=\int e^{\mu}(k,\lambda)\mathrm{i}\left[A_{\mu}(x)\frac{\partial f_k^*(x)}{\partial t}-\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial t}f_k^*(x)\right]\mathrm{d}^3x,$$

对上式取厄米共轭,并注意到光子为一中性粒子,$A_{\mu}^*=A_{\mu}$,得

$$a^{\dagger}(k,\lambda)=\int\mathrm{i}\left[\frac{\partial A_{\mu}(x)}{\partial t}f_k(x)-A_{\mu}(x)\frac{\partial f_k(x)}{\partial t}\right]e^{\mu*}(k,\lambda)\mathrm{d}^3x,$$

亦即

$$a^{\dagger}(k,\lambda)=\int f_k(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\mu*}(k,\lambda)A_{\mu}(x)\mathrm{d}^3x.$$

由于

$$e^{\mu*}(k,\lambda)=\begin{cases}e^{\mu}(k,i)\quad(i=1,2,3),\\-e^{\mu}(k,4).\end{cases}\tag{3.106}$$

比较 $a^{\dagger}$ 与(3.105)式中的 $\bar{a}$ 得

$$\begin{aligned}&\bar{a}(k,i)=a^{\dagger}(k,i)\quad(i=1,2,3),\\&\bar{a}(k,4)=-a^{\dagger}(k,4).\end{aligned}\tag{3.107}$$

由(3.99)式可推知,动量、极化函数算符 $a(k,\lambda)$ 和 $\bar{a}(k,\lambda)$ 满足对易关系

$$\begin{aligned}&[a(k,\lambda),\ \bar{a}(k',\lambda')]=\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{\lambda\lambda'},\\&[a(k,\lambda),\ a(k',\lambda')]=0,\quad[\bar{a}(k,\lambda),\ \bar{a}(k',\lambda')].\end{aligned}\tag{3.108}$$

而(3.97)与(3.98)式的能量与动量,其动量、极化函数形式为

$$\begin{aligned}H&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega\left[\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)+\frac{1}{2}\right],\\\boldsymbol{p}&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\boldsymbol{k}\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda).\end{aligned}\tag{3.109}$$

例 3.10 证明(3.108)与(3.109)式.

证明 将(3.105)代入(3.108)式得

$$\begin{aligned}&[a(k,\lambda),\ \bar{a}(k',\lambda')]\\&=\left[\int e^{\mu}(k,\lambda)A_{\mu}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k^*(x)\mathrm{d}^3x,\ \int f_{k'}(x')\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 e^{\nu}(k',\lambda')A_{\nu}(x')\mathrm{d}^3x'\right]\\&=e^{\mu}(k,\lambda)e^{\nu}(k',\lambda')\int\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'[\dot{A}_{\mu}(x)f_k^*(x)-A_{\mu}(x)\dot{f}_k^*(x),\end{aligned}$$

$$f_{k'}(x')\dot{A}_\nu(x') - \dot{f}_{k'}(x')A_\nu(x')]$$

$$= e^\mu(k,\lambda)e^\nu(k',\lambda')\int d^3x d^3x' \{f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')[A_\nu(x'), \dot{A}_\mu(x)]$$

$$- \dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x')[A_\mu(x), \dot{A}_\nu(x')]\}$$

$$= e^\mu(k,\lambda)e^\nu(k',\lambda')g_{\mu\nu}\int d^3x d^3x' \mathrm{i}[\dot{f}_k^*(x)f_{k'}(x') - f_k^*(x)\dot{f}_{k'}(x')]\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

$$= e^\mu(k,\lambda)e_\mu(k',\lambda')\int d^3x f_{k'}(x)\mathrm{i}\overleftrightarrow{\partial}_0 f_k^*(x)$$

$$\xlongequal{(3.34)式} -e^\mu(k,\lambda)e_\mu(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}$$

$= \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\boldsymbol{kk}'}$，$\Rightarrow$ (3.108)第1式得证.

同样的方法可证明其他两对易式.

将(3.103)代入(3.97)式得

$$H = -\frac{1}{2}\int d^3x(\dot{A}_\mu\dot{A}^\mu + \nabla A_\mu \cdot \nabla A^\mu)$$

$$= -\frac{1}{2}\int d^3x \sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}(-\omega\omega' - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k',\lambda')$$

$$\times [a(k,\lambda)f_k(x) - \bar{a}(k,\lambda)f_k^*(x)][a(k',\lambda')f_{k'}(x) - \bar{a}(k',\lambda')f_{k'}^*(x)]$$

$$\xlongequal{(3.35)式} \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{(\omega\omega' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')}{2\omega}e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k',\lambda')$$

$$\times [a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'} - a(k,\lambda)\bar{a}(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}$$

$$-\bar{a}(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'} + \bar{a}(k,\lambda)\bar{a}(k',\lambda')e^{\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}],$$

若 $\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}'$，$\omega' = \omega = |\boldsymbol{k}|$，则 $\omega\omega' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' = \omega^2 - |\boldsymbol{k}|^2 = 0$，故

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'}\omega e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k,\lambda')[a(k,\lambda)\bar{a}(k,\lambda') + \bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda')]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega[a(k,\lambda)\bar{a}(k,\lambda) + \bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)],$$

亦即

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\omega\left[\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda) + \frac{1}{2}\right], \Rightarrow (3.109)第1式得证.$$

将(3.103)代入(3.98)式得

$$\boldsymbol{p} = \int \dot{A}^\mu \nabla A_\mu d^3x = \int d^3x \sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\omega\boldsymbol{k}' e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k',\lambda')$$

$$\times [a(k,\lambda)f_k(x) - \bar{a}(k,\lambda)f_k^*(x)][a(k',\lambda')f_{k'}(x) - \bar{a}(k',\lambda')f_{k'}^*(x)]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\boldsymbol{k}' e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k',\lambda')$$

$$\times [a(k,\lambda)a(k',\lambda')e^{-\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'} - a(k,\lambda)\bar{a}(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'}$$

$$-\bar{a}(k,\lambda)a(k',\lambda')\delta_{\boldsymbol{kk}'} + \bar{a}(k,\lambda)\bar{a}(k',\lambda')e^{\mathrm{i}2\omega t}\delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k}'}]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'}\boldsymbol{k}e_\mu(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)e^\mu(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda') \\
&\quad\times[a(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)a(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\omega t}+\bar{a}(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)\bar{a}(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\omega t}] \\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\lambda'}\boldsymbol{k}e_\mu(k,\lambda)e^\mu(k,\lambda') \\
&\quad\times[a(k,\lambda)\bar{a}(k,\lambda')+\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda')].
\end{aligned}
$$

与前面库仑规范中同样的理由，当 $\lambda\neq\lambda'$ 时，$e_\mu(\omega,\boldsymbol{k},\lambda)e^\mu(\omega,-\boldsymbol{k},\lambda')=0$；当 $\lambda=\lambda'$ 时，由于对 $\boldsymbol{k}$ 求和包括 $+\boldsymbol{k}$ 与 $-\boldsymbol{k}$ 两部分，而上式第一求和项中，$\boldsymbol{k}$ 后面的乘积因子对于 $+\boldsymbol{k}$ 与 $-\boldsymbol{k}$ 是相等的，求和后为零，故

$$
\boldsymbol{p}=\frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\boldsymbol{k}[a(k,\lambda)\bar{a}(k,\lambda)+\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)],
$$

亦即

$$
\boldsymbol{p}=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\boldsymbol{k}\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda),\ \Rightarrow(3.109)\text{ 第 2 式得证}.
$$

3.6.5 三种光子

在场的能量、动量表达式(3.109)中，有算符

$$
N(k,\lambda)=\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda). \tag{3.110}
$$

由对易关系(3.108)可以证明

$$
[N,a^\dagger]=a^\dagger,\quad [N,a]=-a. \tag{3.111}
$$

如

$$
\begin{aligned}
[N,a^\dagger]&=\begin{cases}[N,\bar{a}(k,i)] & (i=1,2,3),\\ -[N,\bar{a}(k,4)]\end{cases}\\
&=\begin{cases}\bar{a}(k,i) & (i=1,2,3),\\ -\bar{a}(k,4)\end{cases}\\
&=a^\dagger(k,\lambda)\quad(\lambda=1,2,3,4),
\end{aligned}
$$

而

$$
[N,a]=[\bar{a}a,a]=-a.
$$

这样，在 N 的对角化表象中，若

$$
N|n\rangle=n|n\rangle,
$$

则

$$
\begin{aligned}
Na^\dagger|n\rangle&=(n+1)a^\dagger|n\rangle,\\
Na|n\rangle&=(n-1)a|n\rangle.
\end{aligned}\tag{3.112}
$$

表明 $a^\dagger(k,\lambda)$、$a(k,\lambda)$ 与 $N(k,\lambda)=\bar{a}(k,\lambda)a(k,\lambda)$ 是光子的产生、消灭与光子数算符. 光子的能量为 $\omega=|\boldsymbol{k}|$，动量为 $\boldsymbol{k}$，极化为 $\lambda=1,2,3,4$. 其中，$\lambda=1,2$ 的光子称为横光子，$\lambda=3$ 的称为纵光子，$\lambda=4$ 的称为标量光子.

3.6.6 存在的问题

洛伦兹规范条件$\partial^{\mu}A_{\mu}=0$，是一四维标量方程，满足相对论的协变性要求，是相对论的. 但量子化后，该规范条件却存在着严重的不足. 首先它与对易关系

$$[A_{\mu}(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}_{\nu}(\boldsymbol{x}',t)]=-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$$

相矛盾，实际上对上式两边求导得

$$[\partial^{\mu}A_{\mu}(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}_{\nu}(\boldsymbol{x}',t)]=-\mathrm{i}\partial_{\nu}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

上式左边由于洛伦兹条件$=0$，而右边一般来说$\neq 0$，矛盾！

其次，态矢的模方可能是负的，能量也可能是负的.

因为若用$a_4^{\dagger}|0\rangle$表示一个标量光子的状态，则由(3.107)与(3.108)两式得

$$a_4\bar{a}_4=1+\bar{a}_4a_4,\ \Rightarrow\ a_4a_4^{\dagger}=-1+a_4^{\dagger}a_4,$$

则

$$|a_4^{\dagger}|0\rangle|^2=\langle 0|a_4a_4^{\dagger}|0\rangle=\langle 0|(-1+a_4^{\dagger}a_4)|0\rangle=-1,$$

即态矢$a_4^{\dagger}|0\rangle$的模方是负的，难以理解. 而

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\sqrt{2}}a_4^{\dagger 2}|0\rangle\right|^2&=\frac{1}{2}\langle 0|a_4a_4a_4^{\dagger}a_4^{\dagger}|0\rangle\\&=\frac{1}{2}\langle 0|a_4(-1+a_4^{\dagger}a_4)a_4^{\dagger}|0\rangle\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\langle 0|a_4a_4^{\dagger}a_4a_4^{\dagger}|0\rangle\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\langle 0|(-1+a_4^{\dagger}a_4)a_4a_4^{\dagger}|0\rangle\\&=1.\end{aligned}$$

一般情况下可以证明

$$\left||n_4\rangle\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{n_4!}}a_4^{\dagger n_4}|0\rangle\right|^2=(-1)^{n_4}.$$

所以当标量光子数$n_4=$偶数时，态矢的模方是正的；反之当标量光子数$n_4=$奇数时，态矢的模方是负的.

另外

$$\langle n_4|N_4|n_4\rangle=n_4\left||n_4\rangle\right|^2,$$

由于$n_4\geqslant 0$，而$\left||n_4\rangle\right|^2$可正可负，这样粒子数算符$N_4$在态矢中的平均值也可正可负，这使得由(3.109)式表示的能量算符在粒子态间的平均值也可能是负的，这是物理上所不允许的.

3.6.7 量子场论中的洛伦兹条件

在经典电磁场的情况下,洛伦兹条件

$$\partial^{\mu} A_{\mu}=0 \tag{3.113}$$

是两种常用的规范条件之一,其优点是显然的,一是它本身是相对论的,二是由它简化得到的四维势矢量 A_{μ} 的运动方程(1.102)式,即$\partial^{\nu}\partial_{\nu}A^{\mu}=j^{\mu}$ 或 0,也是相对论的. 但量子化后却出现了上述问题. 问题的关键在于,量子化后 $A_{\mu}(x)$的角色变了:由经典场量变成了算符. 而算符在量子理论中只是一种运算符号,没有直接的物理意义和可测量效应,有物理意义和可测量效应的是算符在态矢间的平均值,它和经典理论中的量相对应. 因此,量子场论中的洛伦兹条件,不应以算符的形式出现,而应取成算符在态矢间的平均值. 令$|\phi\rangle$为物理上允许的状态,则经典场论的洛伦兹条件(3.113)式应写成

$$\langle\phi|\partial^{\mu} A_{\mu}(x)|\phi\rangle=0, \tag{3.114}$$

这样,对易子(3.99)是算符关系式,而上式是算符平均值的关系式,二者间不再存在联系,矛盾也就不存在了.

下面继续改写(3.114)式.

由(3.103)式知,算符 $A_{\mu}(x)$可分为正频部分 $A_{\mu}^{+}(x)$和负频部分 $A_{\mu}^{-}(x)$,即

$$A_{\mu}(x)=A_{\mu}^{+}(x)+A_{\mu}^{-}(x),$$

其中

$$\begin{aligned}
A_{\mu}^{+}(x) &= \sum_{\boldsymbol{k}\lambda} e_{\mu}(k,\lambda) a(k,\lambda) f_{k}(x), \\
A_{\mu}^{-}(x) &= \sum_{\boldsymbol{k}\lambda} e_{\mu}(k,\lambda) \bar{a}(k,\lambda) f_{k}^{*}(x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{k}} \sum_{i=1}^{3} e_{\mu}(k,i) a^{\dagger}(k,i) f_{k}^{*}(x)-\sum_{\boldsymbol{k}} e_{\mu}(k,4) a^{\dagger}(k,4) f_{k}^{*}(x),
\end{aligned}$$

注意到(3.106)式

$$[A_{\mu}^{-}(x)]^{\dagger}=A_{\mu}^{+}(x).$$

这样(3.114)式可变写成

$$\langle\phi|\partial^{\mu} A_{\mu}^{+}|\phi\rangle+\langle\phi|\partial^{\mu} A_{\mu}^{-}|\phi\rangle=0,$$

或

$$\langle\phi|\partial^{\mu} A_{\mu}^{+}|\phi\rangle+[\langle\phi|\partial^{\mu} A_{\mu}^{+}|\phi\rangle]^{\dagger}=0,$$

这样如果

$$\partial^{\mu} A_{\mu}^{+}(x)|\phi\rangle=0, \tag{3.115}$$

(3.114)式自然成立,故可将(3.115)式看成是量子场论中的洛伦兹条件.

将 $A_{\mu}^{+}(x)$的平面波展开式代入(3.115)式得

$$\sum_{\boldsymbol{k}\lambda} e_{\mu}(k,\lambda) a(k,\lambda) \partial^{\mu} f_{k}(x)|\phi\rangle=0,$$

对于确定的 $\boldsymbol{k}$,上式变为

$$\sum_{\lambda} k^{\mu} e_{\mu}(k,\lambda) a(k,\lambda) |\phi\rangle = 0,$$

由(1.115)式知

$$k_{\mu} e^{\mu}(k,\lambda) = 0 \quad (\lambda = 1,2),$$

则上式变为

$$k^{\mu}[e_{\mu}(k,3)a(k,3)+e_{\mu}(k,4)a(k,4)]|\phi\rangle=0.$$

又由(1.112)式知

$$e_{\mu}(k,3)=\frac{k_{\mu}-\eta_{\mu}(k\cdot\eta)}{(k\cdot\eta)}, \quad e_{\mu}(k,4)=\mathrm{i}\eta_{\mu},$$

代入上式得

$$\left[\frac{k^2-(k\cdot\eta)^2}{(k\cdot\eta)}a(k,3)+\mathrm{i}(k\cdot\eta)a(k,4)\right]|\phi\rangle=0,$$

对于光子

$$k^2=\omega^2-|\boldsymbol{k}|^2=0,$$

故上式变成

$$-(k\cdot\eta)[a(k,3)-\mathrm{i}a(k,4)]|\phi\rangle=0,$$

亦即

$$[a(k,3)-\mathrm{i}a(k,4)]|\phi\rangle=0,$$

对于任意的 k,上式都成立,故有

$$\begin{aligned}(a_3-\mathrm{i}a_4)|\phi\rangle&=0,\\ \langle\phi|(a_3^{\dagger}+\mathrm{i}a_4^{\dagger})&=0.\end{aligned} \tag{3.116}$$

这就是用产生、消灭算符表示的洛伦兹条件,$a_3^{\dagger}$ 和 a_3 是纵光子的产生和消灭算符,$a_4^{\dagger}$ 和 a_4 是标量光子的产生和消灭算符.只有满足(3.116)式的状态 $|\phi\rangle$,才是物理上允许的.

3.6.8 负模方与负能困难的消除

用(3.114)～(3.116)式表示的量子场论中的洛伦兹条件,不再与正则对易关系相矛盾,同时还消除了由标量光子所引起的负模方与负能量问题.为了看出这一点,考察一下(3.109)式的能量与动量表达式,两式中的纵光子数与标量光子数算符之和为

$$\begin{aligned}N_3+N_4&=\bar{a}_3a_3+\bar{a}_4a_4=a_3^{\dagger}a_3-a_4^{\dagger}a_4\\&=\frac{1}{2}(a_3^{\dagger}-\mathrm{i}a_4^{\dagger})(a_3-\mathrm{i}a_4)+\frac{1}{2}(a_3^{\dagger}+\mathrm{i}a_4^{\dagger})(a_3+\mathrm{i}a_4),\end{aligned}$$

由于洛伦兹条件(3.116)式,它们在物理态中的平均值为零,即

$$\langle\phi|N_3+N_4|\phi\rangle=0,$$

因此,场的能量、动量为

$$\langle \phi | H | \phi \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \omega \langle \phi | \left[a^{\dagger}(k,1) a(k,1) + a^{\dagger}(k,2) a(k,2) + \frac{1}{2} \right] | \phi \rangle,$$

$$\langle \phi | \boldsymbol{p} | \phi \rangle = \sum_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{k} \langle \phi | [a^{\dagger}(k,1) a(k,1) + a^{\dagger}(k,2) a(k,2)] | \phi \rangle,$$

表明在物理上允许的态中,纵光子与标量光子对场的能量、动量的贡献之和为零,场的能量与动量只取决于横光子数,而横光子数的平均值是正定的,这就消除了负能量存在的可能性.

接下来再看一下态矢的负模方问题是如何被消除掉的,为此令

$$L(k) = a(k,3) - \mathrm{i}a(k,4), \tag{3.117}$$

$$L^{\dagger}(k) = a^{\dagger}(k,3) + \mathrm{i}a^{\dagger}(k,4). \tag{3.118}$$

可以证明它们是相互对易的,如

$$\begin{aligned} [L(k), L^{\dagger}(k')] &= [a(k,3) - \mathrm{i}a(k,4),\ a^{\dagger}(k',3) + \mathrm{i}a^{\dagger}(k',4)] \\ &= [a(k,3),\ a^{\dagger}(k',3)] + [a(k,4),\ a^{\dagger}(k',4)] \\ &= \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} - \delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'} \\ &= 0. \end{aligned}$$

再令

$$R_f = 1 + \sum_{\boldsymbol{k}_1} f(k_1) L^{\dagger}(k_1) + \sum_{\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2} f(k_1,k_2) L^{\dagger}(k_1) L^{\dagger}(k_2) + \cdots, \tag{3.119}$$

$$R_g = 1 + \sum_{\boldsymbol{k}_1} g(k_1) L^{\dagger}(k_1) + \sum_{\boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2} g(k_1,k_2) L^{\dagger}(k_1) L^{\dagger}(k_2) + \cdots, \tag{3.120}$$

其中,$f(k_1)$,$f(k_1,k_2)$,$g(k_1)$,$g(k_1,k_2)$,…都是任意的函数.显然,它们及它们的厄米共轭 $R_f^{\dagger}$ 和 $R_g^{\dagger}$ 之间都是相互对易的,即

$$[R_f,\ R_g] = 0, \quad [R_f^{\dagger},\ R_g^{\dagger}] = 0.$$

用 $|\phi_0\rangle$ 表示只有横光子,没有纵光子和标量光子的状态,显然它满足洛伦兹条件

$$L(k)|\phi_0\rangle = 0,$$

所以 $|\phi_0\rangle$ 是物理上允许的状态.用 R_f 与 R_g 作用在 $|\phi_0\rangle$ 上得

$$|\phi_f\rangle = R_f|\phi_0\rangle, \quad |\phi_g\rangle = R_g|\phi_0\rangle,$$

则 $|\phi_f\rangle$ 与 $|\phi_g\rangle$ 将为既包含有横光子,又包含有纵光子与标量光子的状态,且满足洛伦兹条件

$$L(k)|\phi_f\rangle = L(k)R_f|\phi_0\rangle = R_f L(k)|\phi_0\rangle = 0,$$

$$L(k)|\phi_g\rangle = L(k)R_g|\phi'_0\rangle = R_g L(k)|\phi'_0\rangle = 0,$$

其标积为

$$\langle \phi_f | \phi_g \rangle = \langle \phi_0 | R_f^{\dagger} R_g | \phi'_0 \rangle = \langle \phi_0 | R_g R_f^{\dagger} | \phi'_0 \rangle = \langle \phi_0 | \phi'_0 \rangle,$$

表明纵光子和标量光子对态矢的标积也没有贡献,不管态中有无纵、标量光子,态矢

的标积或模方都只与态中的横光子有关,而横光子态矢的模方是正定的,所以态矢的负模方现象在实际的物理测量中不可能发生.

综合以上所述,由于采用了洛伦兹条件(3.114)～(3.116)式,纵光子和标量光子既对算符在态矢间的平均值无影响,又对态矢的标积或模方无贡献,两者仅可以以虚粒子的形式出现在物理过程中,不存在实际的可测量效应,这样就消除了标量光子所引起的麻烦.可测量的物理量只与横光子有关,横光子是真实存在的粒子.这是很显然的,因为自由光子场是一种如(1.117)式所示的平面波场,而平面波是一种横波,满足如(1.109)或(1.115)式所示的库仑或洛伦兹规范条件,这两个条件都告诉我们,真实存在的自由光子场只有横向极化.

3.7　量子场论中的连续对称变换与 Noether 定理

2.3 节曾介绍过 Noether 定理,在那里我们知道,理论的对称性或不变性与守恒定律或守恒荷相对应.那里讨论的是经典场,所以上述结论是对经典场而言的.量子化后,经典场量 $\phi_\alpha(x)$将被视为算符,所以对称性与守恒定律的关系应考虑到算符的特点.本节就是要讨论量子场论中的连续对称变换与 Noether 定理.

3.7.1　连续变换下的生成元

在连续变换下,算符 $\phi_\alpha(x)$的本征变换可用一个幺正算符 U 来实现

$$\phi_\alpha(x) \Rightarrow \phi'_\alpha(x)=U\phi_\alpha(x)U^{-1}, \tag{3.121}$$

其中

$$U=e^{iG},\quad U^\dagger=U^{-1},\quad G^\dagger=G,$$

即 G 是一厄米算符,称为幺正变换的生成元.同样,与 $\phi_\alpha(x)$相应的正则动量 $\pi_\alpha(x)$的本征变换也具有相同的形式,即

$$\pi_\alpha(x) \Rightarrow \pi'_\alpha(x)=U\pi_\alpha(x)U^{-1}, \tag{3.122}$$

而对于作为正则变量 $\phi_\alpha(x)$、$\pi_\alpha(x)$的任意函数 $F[\phi_\alpha(x),\pi_\alpha(x)]$,在上述变换下的本征变换亦为

$$F \Rightarrow F'=UFU^{-1},$$

如哈密顿算符 $H(\phi_\alpha,\pi_\alpha)$

$$H \Rightarrow H'=UHU^{-1}. \tag{3.123}$$

对于无穷小变换,G 是一小量,所以

$$U=1+iG,$$

这样

$$\phi'_\alpha(x)=(1+iG)\phi_\alpha(x)(1-iG)=\phi_\alpha(x)+i[G,\ \phi_\alpha(x)],$$

所以

$$\delta\phi_\alpha(x)=\phi'_\alpha(x)-\phi_\alpha(x)=\mathrm{i}[G,\ \phi_\alpha(x)],\tag{3.124}$$

同样

$$\delta\pi_\alpha(x)=\mathrm{i}[G,\ \pi_\alpha(x)],\tag{3.125}$$

$$\delta F=\mathrm{i}[G,\ F],\tag{3.126}$$

$$\delta H=\mathrm{i}[G,\ H].\tag{3.127}$$

3.7.2 守恒量

量子化后的正则变量 $\phi_\alpha(x)$、$\pi_\alpha(x)$满足对易关系

$$\begin{aligned}&[\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\mp=\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\&[\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \phi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\mp=0,\quad [\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]_\mp=0,\end{aligned}\tag{3.128}$$

其中,“－”号与“＋”号分别代表“对易”与“反对易”关系,各对应于玻色子与费米子场.无论是玻色子还是费米子场,正则变量满足运动方程

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_\alpha(x)&=\mathrm{i}[H,\ \phi_\alpha(x)],\\\dot{\pi}_\alpha(x)&=\mathrm{i}[H,\ \pi_\alpha(x)].\end{aligned}\tag{3.129}$$

而正则变量的任意函数 F,满足运动方程

$$\dot{F}=\mathrm{i}[H,\ F],$$

若 F 不仅是正则变量 $\phi_\alpha(x)$、$\pi_\alpha(x)$的函数,还是时间 t 的函数,则其运动方程应变为

$$\dot{F}=\frac{\partial F}{\partial t}+\mathrm{i}[H,\ F],$$

取上式中的任意函数 F 为生成元 G,则

$$\dot{G}=\frac{\partial G}{\partial t}+\mathrm{i}[H,\ G],\tag{3.130}$$

显然,若

$$\delta H=\mathrm{i}[G,\ H]=\frac{\partial G}{\partial t},\tag{3.131}$$

则由(3.130)式知

$$\dot{G}=0,$$

即生成元 G 为一守恒量.所以通常称(3.131)式为对称变换,而称该式中的 G 为对称变换的生成元,此时它为一守恒量,由此得

量子场论中的 Noether 定理 连续对称变换的生成元是守恒量.

3.7.3 时空平移变换

由 2.4 节的讨论知,时空平移变换是一种对称变换,相应的守恒量是能量与动量

$$H=\int(\pi^\alpha\dot{\phi}_\alpha-\mathscr{L})\mathrm{d}^3x,\quad \boldsymbol{p}=-\int\pi^\alpha\boldsymbol{\nabla}\phi_\alpha\mathrm{d}^3x,$$

由量子场论中的Noether定理知,二者应分别是时间与空间平移变换的生成元,这可直接证明如下.

由(2.24)与(2.27)两式知,在时空平移变换下

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon^{\mu},\ \Rightarrow\ \delta x^{\mu}=\varepsilon^{\mu},$$
$$\phi'_{\alpha}(x)=\phi_{\alpha}(x-\delta x),\ \Rightarrow\ \delta\phi_{\alpha}(x)=\phi'_{\alpha}(x)-\phi_{\alpha}(x)=-\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\phi_{\alpha}(x). \tag{3.132}$$

若取幺正算符

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}G},\quad G=-\varepsilon\cdot p=-\varepsilon^{\mu}p_{\mu}, \tag{3.133}$$

其中,$p^{\mu}=(H,\boldsymbol{p})$是四维动量矢量,现在是生成元.量子化后

$$\phi'_{\alpha}(x)=U\phi_{\alpha}(x)U^{-1},$$
$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\mathrm{i}[\varepsilon^{\mu}p_{\mu},\ \phi_{\alpha}(x)]. \tag{3.134}$$

在时间平移变换下,由(3.132)式知

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\varepsilon^{0}\dot{\phi}_{\alpha}(x), \tag{3.135}$$

又由(3.134)式知,时间平移变换下

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\mathrm{i}\varepsilon_{0}[H,\phi_{\alpha}(x)], \tag{3.136a}$$

生成元是哈密顿算符H.另由正则运动方程(3.129),上式变为

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\varepsilon^{0}\dot{\phi}_{\alpha}(x), \tag{3.136b}$$

与(3.135)式一致,表明哈密顿算符H确实为时间平移变换的生成元.

在空间平移变换下,由(3.132)式得

$$\delta\phi_{\alpha}(x)=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi_{\alpha}(x), \tag{3.137}$$

而由(3.134)式得

$$\begin{aligned}\delta\phi_{\alpha}(x)&=\mathrm{i}[\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{p},\ \phi_{\alpha}(x)]\\&=-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\left[\int\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\,\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\mathrm{d}^{3}x',\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)\right],\end{aligned} \tag{3.138a}$$

生成元是三维动量算符$\boldsymbol{p}$.对于玻色子

$$\begin{aligned}&[\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)]\\&=[\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)]\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\phi_{\alpha}(\boldsymbol{x}',t).\end{aligned}$$

对于费米子

$$\begin{aligned}&[\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)]\\&\xlongequal{(3.66)\text{式}}\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\{\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)\}-\{\pi_{\beta}(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t)\}\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\\&=0-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\phi^{\beta}(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta^{3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\boldsymbol{\nabla}'\phi_{\alpha}(\boldsymbol{x}',t).\end{aligned}$$

这样,无论是玻色子还是费米子,都有

$$\delta\phi_\alpha(x)=-\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\nabla\phi_\alpha(x),\tag{3.138b}$$

与(3.137)式一致,所以 $\boldsymbol{p}$ 是空间平移变换的生成元.

3.7.4 时空转动变换

由 2.5 节的讨论知,时空转动,亦即洛伦兹变换,也是一种对称变换,相应的守恒量为如(2.62)式所示的角动量

$$J^{\nu\lambda}=\int(x^\nu T^{0\lambda}-x^\lambda T^{0\nu}+\mathrm{i}\pi_\alpha S^{\nu\lambda,\alpha\beta}\phi_\beta)\mathrm{d}^3x,$$

按照量子场论中的 Noether 定理,$J^{\nu\lambda}$ 是洛伦兹对称变换的生成元,亦即

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}G},\quad G=-\varepsilon^{\lambda\nu}J_{\nu\lambda}.\tag{3.139}$$

上述结论亦可直接证明如下.

在洛伦兹变换下

$$x^\mu\Rightarrow x'^\mu=x^\mu+\varepsilon^{\mu\nu}x_\nu,$$

四维动量矢量 $p^\mu=(H,\boldsymbol{p})$ 作变换

$$p^\mu\Rightarrow p'^\mu=p^\mu+\varepsilon^{\mu\nu}p_\nu,$$

所以

$$\delta p^\mu=\varepsilon^{\mu\nu}p_\nu.$$

在空间转动变换下,$x'^0=x^0$. 而

$$x'^0=x^0+\varepsilon^{0i}x_i,$$

所以有

$$\varepsilon^{0i}=0,\quad \delta H=\varepsilon^{0i}p_i=0,\tag{3.140}$$

相应的生成元为

$$G=-\varepsilon^{ji}J_{ij},$$

由于

$$J_{ij}=g_{ik}g_{jm}J^{km}=g_{ii}g_{jj}J^{ij}=J^{ij},\tag{3.141}$$

同理

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon^{ij},\tag{3.142}$$

故

$$G=-\varepsilon^{ji}J_{ij}=-\varepsilon_{ji}J^{ij}.$$

而

$$J_{ij}=J^{ij}=\int(x^iT^{0j}-x^jT^{0i}+\mathrm{i}\pi_\alpha S^{ij,\alpha\beta}\phi_\beta)\mathrm{d}^3x\tag{3.143}$$

不显含时间 t,所以

$$\frac{\partial G}{\partial t}=0\xlongequal{(3.140)式}\delta H,\tag{3.144}$$

则由关系(3.131)知,G 亦即 $J_{ij}=J^{ij}$ 是洛伦兹对称变换的生成元.

再考虑包含时间轴的洛伦兹变换,如(x^0,x^i)二维空间的转动变换.由于

$$x'^i = x^i + \varepsilon^{i\nu} x_\nu = x^i + \varepsilon^{i0} x_0 + \varepsilon^{ij} x_j,$$

所以有

$$\varepsilon^{ij} = 0, \quad \delta H = \varepsilon^{0i} p_i = -\varepsilon^{0i} p^i, \tag{3.145}$$

相应的生成元为

$$G = -\varepsilon^{0i} J_{i0},$$

而

$$J_{i0} = g_{ik} g_{0m} J^{km} = g_{ii} g_{00} J^{i0} = -J^{i0} = J^{0i}, \tag{3.146}$$

同理

$$\varepsilon_{i0} = \varepsilon^{0i}, \tag{3.147}$$

故

$$G = -\varepsilon^{0i} J_{i0} = -\varepsilon_{i0} J^{0i},$$

而

$$J_{i0} = J^{0i} = \int (x^0 T^{0i} - x^i T^{00} + \mathrm{i}\pi_\alpha S^{0i,\alpha\beta} \phi_\beta) \mathrm{d}^3 x, \tag{3.148}$$

则

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\varepsilon_{i0} \frac{\partial J^{0i}}{\partial t} = -\varepsilon_{i0} \int T^{0i} \mathrm{d}^3 x$$

$$\xlongequal{(2.29)\text{式}} -\varepsilon_{i0} p^i \xlongequal{(3.147)\text{式}} -\varepsilon^{0i} p^i \xlongequal{(3.145)\text{式}} \delta H,$$

故G,亦即$J_{i0} = J^{0i}$是洛伦兹对称变换的生成元.

3.7.5　内部空间的对称变换

在内部空间的转动变换下,由2.8节的讨论知

$$\phi_\alpha \Rightarrow \phi'_\alpha = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \phi_\alpha,$$

对于无穷小变换

$$\phi'_\alpha = (1 - \mathrm{i}\theta)\phi_\alpha, \Rightarrow \delta\phi_\alpha = -\mathrm{i}\theta\phi_\alpha, \quad \delta\phi_\alpha^* = \mathrm{i}\theta\phi_\alpha^*. \tag{3.149}$$

在上述对称变换下,其守恒荷为(2.137)式,即

$$Q = -\mathrm{i}\int (\pi_\alpha \phi^\alpha - \pi_\alpha^* \phi^{\alpha *}) \mathrm{d}x^3, \tag{3.150}$$

则由量子场论中的Noether定理知,Q应是对称变换的生成元,即

$$U = \mathrm{e}^{\mathrm{i}G}, \quad G = \theta Q. \tag{3.151}$$

使得

$$\delta\phi_\alpha(x) = \mathrm{i}[G, \phi_\alpha(x)].$$

直接计算可以证明,上式是成立的.因为

$$\delta\phi_\alpha(x) = \mathrm{i}[G, \phi_\alpha(x)] = \mathrm{i}\theta[Q, \phi_\alpha(x)]$$

$$=\theta\Big[\int[\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t)-\pi_\beta^*(\boldsymbol{x}',t)\phi^{\beta*}(\boldsymbol{x}',t)]\mathrm{d}x'^3,\ \phi_\alpha(x)\Big].$$

对于玻色子

$$\begin{aligned}&[\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_\alpha(\boldsymbol{x},t)]\\&=[\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_\alpha(\boldsymbol{x},t)]\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi_\alpha(\boldsymbol{x}',t).\end{aligned}$$

对于费米子

$$\begin{aligned}&[\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_\alpha(\boldsymbol{x},t)]\\&\xlongequal{(3.66)式}\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\{\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_\alpha(\boldsymbol{x},t)\}-\{\pi_\beta(\boldsymbol{x}',t),\ \phi_\alpha(\boldsymbol{x},t)\}\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t)\\&=0-\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi^\beta(\boldsymbol{x}',t)\\&=-\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi_\alpha(\boldsymbol{x}',t).\end{aligned}$$

而剩余部分对易.这样,无论是玻色子还是费米子,都有

$$\delta\phi_\alpha(x)=-\mathrm{i}\theta\int\mathrm{d}^3x'\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\phi_\alpha(\boldsymbol{x}',t)=-\mathrm{i}\theta\phi_\alpha(x),$$

与(3.149)式一致,表明(3.151)式所示的 G,亦即(3.150)式所示的 Q 是内部对称变换的生成元.

3.8 量子场论中的 PCT 变换

3.7 节讨论了连续对称变换的量子形式,得到了量子场论的 Noether 定理:守恒量是连续对称变换的生成元.本节将讨论经典场论中不连续的 PCT 变换的量子形式.

3.8.1 空间反射变换

空间反射变换由(2.94)式定义为

$$\boldsymbol{x}\Rightarrow\boldsymbol{x}'=-\boldsymbol{x},\quad t\Rightarrow t'=t,$$

由 2.6 节的讨论知,在上述变换下,标量场、狄拉克场、电磁场分别作如下变换

$$\begin{aligned}&\phi'(\boldsymbol{x},t)=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t),\\&\psi'(\boldsymbol{x},t)=\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t),\quad\bar{\psi}'(\boldsymbol{x},t)=\pm\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_0,\\&\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t)=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t),\quad A'_0(\boldsymbol{x},t)=A_0(-\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{3.152}$$

量子化后,场量变成算符,场算符的本征变换可以用一个幺正算符 $\mathscr{P}$来实现

$$\phi'_\alpha(x)=\mathscr{P}\phi_\alpha(x)\mathscr{P}^{-1},$$

其中,$\mathscr{P}^\dagger=\mathscr{P}^{-1}$,则(3.152)诸式可变写成

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t),\\
&\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t),\quad \mathscr{P}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_0,\\
&\mathscr{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t),\quad \mathscr{P}A_0(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=A_0(-\boldsymbol{x},t).
\end{aligned}
\tag{3.153}
$$

据此,可以导出粒子的产生与消灭算符及粒子的态矢量在空间反射下的变换规律.

1.标量场

标量场算符在空间反射下的变换规律为

$$\mathscr{P}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t),$$

场算符的平面波展开由(3.51)式给出,即

$$\phi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],$$

这样

$$\mathscr{P}\phi(x)\mathscr{P}^{-1}=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}\left[\mathscr{P}a(k)\mathscr{P}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathscr{P}b^{\dagger}(k)\mathscr{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],$$

而

$$
\begin{aligned}
\pm\phi(-\boldsymbol{x},t)&=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\pm1}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+b^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\pm1}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],
\end{aligned}
$$

两式相等要求

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}a(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}=\pm a(-\boldsymbol{k}),\quad \mathscr{P}b^{\dagger}(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}=\pm b^{\dagger}(-\boldsymbol{k}),\\
&\mathscr{P}a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}=\pm a^{\dagger}(-\boldsymbol{k}),\quad \mathscr{P}b(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}=\pm b(-\boldsymbol{k}).
\end{aligned}
\tag{3.154}
$$

这就是标量粒子的场算符在空间反射下的变换规律:动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子产生或消灭算符,空间反射后,变为动量为 $-\boldsymbol{k}$ 的产生或消灭算符.反粒子也一样."±"号取决于粒子的宇称,正反粒子的宇称相同.

对于态矢,如

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{P}a^{\dagger}(k)|0\rangle=\mathscr{P}a^{\dagger}(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle=\pm a^{\dagger}(-\boldsymbol{k})|0\rangle,\\
&\mathscr{P}b^{\dagger}(k)|0\rangle=\mathscr{P}b^{\dagger}(\boldsymbol{k})\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle=\pm b^{\dagger}(-\boldsymbol{k})|0\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.155}
$$

这里假设 $\mathscr{P}|0\rangle=|0\rangle$,即真空态在空间反射变换下保持不变.(3.155)式表明,动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子、反粒子态,在空间反射变换下,变成动量为 $-\boldsymbol{k}$ 的粒子、反粒子态.

2.狄拉克场

在空间反射变换下,狄拉克场的变换规律为

$$\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t).$$

场算符的平面波展开由(3.68)式给出,即

$$\psi(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c(p,s)u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+d^{\dagger}(p,s)v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],$$

这样

$$\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[\mathscr{P}c(p,s)\mathscr{P}^{-1}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\mathscr{P}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{P}^{-1}v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],\tag{3.156}$$

$$\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t)=\pm\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c(p,s)\gamma_0u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+d^{\dagger}(p,s)\gamma_0v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right].$$

在标准表示中，由(1.18)与(1.39)两式知

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},$$

$$u(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_s\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\end{pmatrix},\quad v(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_s\\ \chi_s\end{pmatrix},$$

则

$$\gamma_0u(p,s)=u(-\boldsymbol{p},s),\quad\gamma_0v(p,s)=-v(-\boldsymbol{p},s),$$

这样，

$$\begin{aligned}\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t)&=\pm\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c(p,s)u(-\boldsymbol{p},s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}-d^{\dagger}(p,s)v(-\boldsymbol{p},s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\\&=\pm\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c(-\boldsymbol{p},s)u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}-d^{\dagger}(-\boldsymbol{p},s)v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}\right],\end{aligned}$$

与(3.156)式相等要求

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}c(\boldsymbol{p},s)\mathscr{P}^{-1}=\pm c(-\boldsymbol{p},s),\quad\mathscr{P}d^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)\mathscr{P}^{-1}=\mp d^{\dagger}(-\boldsymbol{p},s),\\&\mathscr{P}c^{\dagger}(\boldsymbol{p},s)\mathscr{P}^{-1}=\pm c^{\dagger}(-\boldsymbol{p},s),\quad\mathscr{P}d(\boldsymbol{p},s)\mathscr{P}^{-1}=\mp d(-\boldsymbol{p},s).\end{aligned}\tag{3.157}$$

这就是狄拉克粒子的场算符在空间反射变换下的变换性质，动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子、反粒子的产生与消灭算符在空间反射变换下，变成动量为 $-\boldsymbol{p}$ 的产生与消灭算符，正反粒子的宇称相反.

狄拉克粒子态矢的变换规律为

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}c^{\dagger}(p,s)|0\rangle=\mathscr{P}c^{\dagger}(p,s)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle=\pm c^{\dagger}(-\boldsymbol{p},s)|0\rangle,\\&\mathscr{P}d^{\dagger}(p,s)|0\rangle=\mathscr{P}d^{\dagger}(p,s)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle=\mp d^{\dagger}(-\boldsymbol{p},s)|0\rangle.\end{aligned}\tag{3.158}$$

即动量为 $\boldsymbol{p}$ 的粒子、反粒子态，在空间反射下，变成动量为 $-\boldsymbol{p}$ 的粒子、反粒子态.

3. 电磁场

在库仑规范下，场算符的变换为

$$\mathscr{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t),\quad A_0(\boldsymbol{x},t)=0.$$

场算符的平面波展开由(3.89)式给出,即

$$\boldsymbol{A}(x)=\sum_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+a^{\dagger}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],$$

这样

$$\mathscr{P}\boldsymbol{A}(x)\mathscr{P}^{-1}=\sum_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left[\mathscr{P}a(k,\lambda)\mathscr{P}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathscr{P}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathscr{P}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],\tag{3.159}$$

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t)&=-\sum_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right]\\&=-\sum_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left[a(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right].\end{aligned}$$

如图3.1所示,当 $\boldsymbol{k}\Rightarrow-\boldsymbol{k}$ 时,为保持右手螺旋关系不变,极化矢量 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}(k,2)$ 要作变化

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},1)=-\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},1),\quad \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},2)=\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},2),$$

这样

$$\begin{aligned}-A(-\boldsymbol{x},t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}&\left[\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)a(-\boldsymbol{k},1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},2)a(-\boldsymbol{k},2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right.\\&\left.+\boldsymbol{\varepsilon}(k,1)a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},2)a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right].\end{aligned}$$

与(3.159)式相等要求

$$\begin{aligned}\mathscr{P}a(k,\lambda)\mathscr{P}^{-1}&=(-1)^{\lambda+1}a(-\boldsymbol{k},\lambda),\\\mathscr{P}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathscr{P}^{-1}&=(-1)^{\lambda+1}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda).\end{aligned}\tag{3.160}$$

这就是光子的场算符在空间反射变换下的变换规律:动量为 $\boldsymbol{k}$ 的光子产生或消灭算符,在空间反射变换下,变为 $-\boldsymbol{k}$ 的产生或消灭算符,而宇称与其极化状态有关.

光子态矢的变换规律为

$$\mathscr{P}a^{\dagger}(k,\lambda)|0\rangle=\mathscr{P}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathscr{P}^{-1}\mathscr{P}|0\rangle=(-1)^{\lambda+1}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle.\tag{3.161}$$

以上是线偏振 $\lambda=1,2$ 的情况.定义圆偏振算符

$$\begin{aligned}a^{\dagger}(k,+)&=a^{\dagger}(k,1)+\mathrm{i}a^{\dagger}(k,2),\\a^{\dagger}(k,-)&=a^{\dagger}(k,1)-\mathrm{i}a^{\dagger}(k,2).\end{aligned}\tag{3.162}$$

则由(3.160)式得

$$\begin{aligned}\mathscr{P}a^{\dagger}(k,+)\mathscr{P}^{-1}&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},-),\\\mathscr{P}a^{\dagger}(k,-)\mathscr{P}^{-1}&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},+).\end{aligned}\tag{3.163}$$

对于态矢

$$\begin{aligned}\mathscr{P}a^{\dagger}(k,+)|0\rangle&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},-)|0\rangle,\\\mathscr{P}a^{\dagger}(k,-)|0\rangle&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},+)|0\rangle.\end{aligned}\tag{3.164}$$

即在该情况下,光子的动量 $\boldsymbol{k}$ 变成 $-\boldsymbol{k}$,右旋极化光变成左旋极化光,反之左旋极化光变成右旋极化光.

3.8.2 电荷共轭变换

由 2.6 节的讨论知，在电荷共轭变换下，各种场量作如下变换

$$
\begin{aligned}
&\phi^C(x)=\phi^*(x),\quad \phi^{*C}(x)=\phi(x),\\
&\psi^C(x)=C\widetilde{\bar{\psi}}(x),\quad \bar{\psi}^C(x)=-\widetilde{\psi}(x)C^{-1},\\
&C^{-1}\gamma_\mu C=-\widetilde{\gamma}_\mu,\quad C^\dagger=C^{-1},\quad \widetilde{C}=-C,\quad C=\mathrm{i}\gamma^0\gamma^2,\\
&A_\mu^C(x)=-A_\mu(x).
\end{aligned}
\tag{3.165}
$$

量子化后，$\phi(x)$、$\psi(x)$与 $A_\mu(x)$变为算符，其本征变换可用幺正算符 $\mathcal{C}$来实现，即

$$\phi_\alpha^C(x)=\mathcal{C}\,\phi_\alpha(x)\mathcal{C}^{-1},$$

则(3.165)诸式可以变成

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1}=\phi^*(x),\quad \mathcal{C}\phi^*(x)\mathcal{C}^{-1}=\phi(x),\\
&\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1}=C\widetilde{\bar{\psi}},\quad \mathcal{C}\bar{\psi}(x)\mathcal{C}^{-1}=-\widetilde{\psi}(x)C^{-1},\\
&\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1}=-A_\mu(x).
\end{aligned}
\tag{3.166}
$$

由此可导出粒子的产生与消灭算符和粒子态矢的变换规律.

1. 标量场

在电荷共轭变换下，场算符的变换为

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1}=\phi^*(x),$$

上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^{-1}=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[\mathcal{C}a(k)\mathcal{C}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{C}b^\dagger(k)\mathcal{C}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],$$

$$\phi^*(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+b(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}],$$

由二者相等得

$$\mathcal{C}a(k)\mathcal{C}^{-1}=b(k),\quad \mathcal{C}b^\dagger(k)\mathcal{C}^{-1}=a^\dagger(k),\tag{3.167}$$

$$\mathcal{C}a^\dagger(k)|0\rangle=b^\dagger(k)|0\rangle,\quad \mathcal{C}b^\dagger(k)|0\rangle=a^\dagger(k)|0\rangle.\tag{3.168}$$

可见，在电荷共轭变换下，正粒子变成反粒子，反粒子变成正粒子，正反粒子相互转换.

2. 狄拉克场

在电荷共轭变换下，场算符的变换为

$$\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1}=C\widetilde{\bar{\psi}},$$

上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{C}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{C}^{-1}=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[\mathcal{C}c(p,s)\mathcal{C}^{-1}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}+\mathcal{C}d^\dagger(p,s)\mathcal{C}^{-1}v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],\tag{3.169}$$

$$C\tilde{\bar{\psi}}(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c^{\dagger}(p,s)C\tilde{\bar{u}}(p,s)e^{ip\cdot x}+d(p,s)C\tilde{\bar{v}}(p,s)e^{-ip\cdot x}\right],$$

在标准表示中

$$C=i\gamma^{0}\gamma^{2}=i\alpha_{2}=\begin{pmatrix}0 & i\sigma_{2}\\ i\sigma_{2} & 0\end{pmatrix},$$

$$u(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_{s}\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s}\end{pmatrix},\quad v(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s}\\ \chi_{s}\end{pmatrix},$$

则

$$C\tilde{\bar{u}}(p,s)=(-1)^{s}v(p,\bar{s}),\quad C\tilde{\bar{v}}(p,s)=(-1)^{s+1}u(p,\bar{s})\quad(s\neq\bar{s}).\tag{3.170}$$

这样

$$\begin{aligned}C\tilde{\bar{\psi}}(x)&=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c^{\dagger}(p,s)(-1)^{s}v(p,\bar{s})e^{ip\cdot x}+d(p,s)(-1)^{s+1}u(p,\bar{s})e^{-ip\cdot x}\right]\\&=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[(-1)^{\bar{s}}c^{\dagger}(p,\bar{s})v(p,s)e^{ip\cdot x}+(-1)^{\bar{s}+1}d(p,\bar{s})u(p,s)e^{-ip\cdot x}\right],\end{aligned}$$

与(3.169)式相等得

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}c(p,s)\mathcal{C}^{-1}=(-1)^{\bar{s}+1}d(p,\bar{s}),\\&\mathcal{C}d^{\dagger}(p,s)\mathcal{C}^{-1}=(-1)^{\bar{s}}c^{\dagger}(p,\bar{s}).\end{aligned}\tag{3.171}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}c^{\dagger}(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}+1}d^{\dagger}(p,\bar{s})|0\rangle,\\&\mathcal{C}d^{\dagger}(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}c^{\dagger}(p,\bar{s})|0\rangle.\end{aligned}\tag{3.172}$$

这表明,电荷共轭变换使费米子变成反费米子,反费米子变成费米子,且自旋取向反转.

例 3.11 证明(3.170)式.

证明 由旋量波函数的表达式知

$$\bar{u}(p,s)=u^{\dagger}(p,s)\gamma_{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}\chi_{s}^{\dagger} & \chi_{s}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_{s}^{\dagger} & -\chi_{s}^{\dagger}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\end{pmatrix},$$

$$\tilde{\bar{u}}(p,s)\Rightarrow\begin{pmatrix}\chi_{s}\\ -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_{s}\\ -\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\end{pmatrix}.$$

上式最后一步用到了关系

$$\boldsymbol{\sigma}^{\dagger}=\boldsymbol{\sigma},\ \Rightarrow\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}^{*},$$

则

$$C\tilde{\bar{u}}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & i\sigma_{2}\\ i\sigma_{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{s}\\ -\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-i\sigma_{2}\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\\ i\sigma_{2}\chi_{s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,i\sigma_{2}\chi_{s}\\ i\sigma_{2}\chi_{s}\end{pmatrix},$$

上式最后一步用到了关系

$$\sigma_1^* = \sigma_1,\ \sigma_2^* = -\sigma_2,\ \sigma_3^* = \sigma_3,\ \sigma_i\sigma_j = -\sigma_j\sigma_i\,(i\neq j). \tag{3.173}$$

又

$$\mathrm{i}\sigma_2\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\chi_2,\quad \mathrm{i}\sigma_2\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi_1,$$

故

$$\mathrm{i}\sigma_2\chi_s = (-1)^s\chi_{\bar{s}}\quad (s\neq\bar{s}),$$

这样

$$C\tilde{\bar{u}}(p,s) = (-1)^s\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{\bar{s}} \\ \chi_{\bar{s}} \end{pmatrix} = (-1)^s v(p,\bar{s})\quad (s\neq\bar{s}),$$ ⇒ (3.170)第 1 式得证.

同理

$$\bar{v}(p,s) = v^\dagger(p,s)\gamma_0 \Rightarrow \left(\chi_s^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\quad \chi_s^\dagger\right)\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \left(\chi_s^\dagger\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\quad -\chi_s^\dagger\right),$$

$$\tilde{\bar{v}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\boldsymbol{p}\chi_s \\ -\chi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}\chi_s \\ -\chi_s \end{pmatrix},$$

$$C\tilde{\bar{v}} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\sigma_2 \\ \mathrm{i}\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}\chi_s \\ -\chi_s \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma_2\chi_s \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\,\mathrm{i}\sigma_2\chi_s \end{pmatrix} = (-1)^{s+1}\begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{\bar{s}} \end{pmatrix},$$

故

$$C\tilde{\bar{v}}(p,s) = (-1)^{s+1}\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix} \chi_{\bar{s}} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{\bar{s}} \end{pmatrix} = (-1)^{s+1}u(p,\bar{s})\quad (s\neq\bar{s}),$$ ⇒ (3.170)第 2 式得证.

3. 电磁场

在电荷共轭变换下,场算符的变换为

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu(x).$$

在洛伦兹规范下,上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{C}A_\mu(x)\mathcal{C}^{-1} = \sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\left[\mathcal{C}a(k,\lambda)\mathcal{C}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} + \mathcal{C}\bar{a}(k,\lambda)\mathcal{C}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right],$$

与 $-A_\mu(x)$ 相等,并注意到(3.107)式得

$$\mathcal{C}a(k,\lambda)\mathcal{C}^{-1} = -a(k,\lambda),\quad \mathcal{C}a^\dagger(k,\lambda)\mathcal{C}^{-1} = -a^\dagger(k,\lambda), \tag{3.174}$$

$$\mathcal{C}a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle = -a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle, \tag{3.175}$$

这表明,光子态是电荷共轭变换的本征态,本征值为 −1. 如 2.6 节所述,光子为一中

性矢量粒子，有确定的 C 宇称，其 C 宇称是负的，这与上面所得的结果是一致的.

3.8.3　时间反演变换

时间反演变换定义为

$$\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}, \quad t \Rightarrow t' = -t,$$

由 2.6 节的讨论知，在上述变换下，标量场、狄拉克场、电磁场分别作如下变换

$$\begin{aligned}
&\phi'(\boldsymbol{x},t) = \phi(\boldsymbol{x},-t),\\
&\psi'(\boldsymbol{x},t) = T\psi(\boldsymbol{x},-t),\ \bar{\psi}'(\boldsymbol{x},t) = \bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)T^{-1},\\
&T^{-1}\tilde{\gamma}_\mu T = \gamma_\mu, \quad T^\dagger = T^{-1}, \quad \tilde{T} = -T, \quad T = \gamma^1\gamma^3,\\
&\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t),\ A_0'(\boldsymbol{x},t) = A_0(\boldsymbol{x},-t).
\end{aligned} \tag{3.176}$$

作为算符，时间反演变换可由一非幺正算符 $\mathcal{T} = \mathcal{U}\mathcal{K}$ 来实现

$$\phi'_\alpha(x) = \mathcal{T}\phi_\alpha(x)\mathcal{T}^{-1},$$

其中，$\mathcal{U}$ 为幺正算符，$\mathcal{K}$ 是复共轭运算算符，它使 C 数变成其复共轭，即

$$\mathcal{U}^\dagger = \mathcal{U}^{-1}, \quad \mathcal{K}C\mathcal{K}^{-1} = C^*, \tag{3.177}$$

时间反演算符之所以取成非幺正的，原因在于正则对易关系，如

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)] = \mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),$$

在时间反演变换下应是不变的. 由上式得

$$\mathcal{T}[\phi(\boldsymbol{x},t),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t)]\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathcal{T}^{-1},$$

注意到 $\mathcal{T}$ 只对算符与 C 数有作用，上式变为

$$\left[\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1},\ \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x}',t)\mathcal{T}^{-1}\right] = \mathcal{T}\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathcal{T}^{-1},$$

$$\left[\phi(\boldsymbol{x},-t),\ \frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x}',-t)\right] = \mathcal{T}\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathcal{T}^{-1},$$

取 $t' = -t$，得

$$-[\phi(\boldsymbol{x},t'),\ \dot{\phi}(\boldsymbol{x}',t')] = \mathcal{T}\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathcal{T}^{-1},$$

因此对易关系在时间反演变换下不变要求

$$\mathcal{T}\mathrm{i}\mathcal{T}^{-1} = -\mathrm{i},\ \Rightarrow\ \mathcal{T}C\mathcal{T}^{-1} = C^*.$$

这样在时间反演变换下，(3.176)诸式变为

$$\begin{aligned}
&\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = \phi(\boldsymbol{x},-t),\\
&\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = T\psi(\boldsymbol{x},-t),\ \mathcal{T}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = \bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)T^{-1}\\
&\mathcal{T}A(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t),\ \mathcal{T}A_0(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1} = A_0(\boldsymbol{x},-t).
\end{aligned} \tag{3.178}$$

由此可以推出粒子的产生、消灭算符和态矢的变换规律.

1. 标量场

在时间反演变换下，标量粒子的场算符变为

$$\mathcal{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=\phi(\boldsymbol{x},-t).$$

上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{T}\phi(x)\mathcal{T}^{-1}=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[\mathcal{U}a(k)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{U}b^{\dagger}(k)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}],$$

$$\phi(\boldsymbol{x},-t)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+b^{\dagger}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+b^{\dagger}(-\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}],$$

由此可推知

$$\mathcal{U}a(k)\mathcal{U}^{-1}=a(-\boldsymbol{k}),\quad \mathcal{U}b^{\dagger}(k)\mathcal{U}^{-1}=b^{\dagger}(-\boldsymbol{k}),\tag{3.179}$$

$$\mathcal{U}a^{\dagger}(k)|0\rangle=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k})|0\rangle,\quad \mathcal{U}b^{\dagger}(k)|0\rangle=b^{\dagger}(-\boldsymbol{k})|0\rangle,\tag{3.180}$$

即在时间反演变换下,粒子的动量 $\boldsymbol{k}$ 变成了$-\boldsymbol{k}$.

2. 狄拉克场

在时间反演变换下,狄拉克场算符的变换为

$$\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=T\psi(\boldsymbol{x},-t),$$

上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}$$

$$=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[\mathcal{U}c(p,s)\mathcal{U}^{-1}u^{*}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+\mathcal{U}d^{\dagger}(p,s)\mathcal{U}^{-1}v^{*}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}],\tag{3.181}$$

$$T\psi(\boldsymbol{x},-t)=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}[c(p,s)Tu(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}+d^{\dagger}(p,s)Tv(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}].$$

在标准表示中

$$T=\gamma^{1}\gamma^{3}=-\alpha_{1}\alpha_{3}=-\begin{pmatrix}0&\sigma_{1}\\\sigma_{1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma_{3}\\\sigma_{3}&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}&0\\0&\sigma_{1}\sigma_{3}\end{pmatrix},$$

$$u(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\chi_{s}\\\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s}\end{pmatrix},\quad v(p,s)=\sqrt{\frac{E+m}{2m}}\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+m}\chi_{s}\\\chi_{s}\end{pmatrix},$$

则

$$Tu(p,s)\Rightarrow-\begin{pmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}&0\\0&\sigma_{1}\sigma_{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{s}\\\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}\chi_{s}\\\sigma_{1}\sigma_{3}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_{s}\end{pmatrix},$$

$$=-\begin{pmatrix}\sigma_{1}\sigma_{3}\chi_{s}\\-\boldsymbol{\sigma}^{*}\cdot\boldsymbol{p}\sigma_{1}\sigma_{3}\chi_{s}\end{pmatrix}.$$

上式最后一步用到了关系(3.173)式. 又

$$\sigma_1\sigma_3\chi_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\chi_2,$$

$$\sigma_1\sigma_3\chi_2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=-\chi_1,$$

故

$$\sigma_1\sigma_3\chi_s=(-1)^{s+1}\chi_{\bar{s}}\quad(s\neq\bar{s}),$$

则

$$Tu(p,s)\Rightarrow(-1)^s\begin{pmatrix}\chi_{\bar{s}}\\-\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}\chi_{\bar{s}}\end{pmatrix},$$

这样

$$Tu(p,s)=(-1)^s u^*(-\boldsymbol{p},\bar{s}).\tag{3.182a}$$

同理

$$Tv(p,s)\Rightarrow-\begin{pmatrix}\sigma_1\sigma_3&0\\0&\sigma_1\sigma_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_s\\\chi_s\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\sigma_1\sigma_3\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi_s\\\sigma_1\sigma_3\chi_s\end{pmatrix}$$

$$=-\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}\sigma_1\sigma_3\chi_s\\\sigma_1\sigma_3\chi_s\end{pmatrix}=(-1)^s\begin{pmatrix}-\boldsymbol{\sigma}^*\cdot\boldsymbol{p}\chi_{\bar{s}}\\\chi_{\bar{s}}\end{pmatrix},$$

亦即

$$Tv(p,s)=(-1)^s v^*(-\boldsymbol{p},\bar{s}).\tag{3.182b}$$

这样

$$\begin{aligned}&T\psi(\boldsymbol{x},-t)\\=&\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}\big[c(p,s)(-1)^s u^*(-\boldsymbol{p},\bar{s})\mathrm{e}^{\mathrm{i}Et+\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\\&+d^\dagger(p,s)(-1)^s v^*(-\boldsymbol{p},\bar{s})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et-\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\big]\\=&\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE}}(-1)^{\bar{s}}\big[c(-\boldsymbol{p},\bar{s})u^*(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}+d^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{s})v^*(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}\big],\end{aligned}$$

与(3.181)式相等得

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}c(p,s)\mathcal{U}^{-1}=(-1)^{\bar{s}}c(-\boldsymbol{p},\bar{s}),\\&\mathcal{U}d^\dagger(p,s)\mathcal{U}^{-1}=(-1)^{\bar{s}}d^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{s}).\end{aligned}\tag{3.183}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}c^\dagger(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}c^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{s})|0\rangle,\\&\mathcal{U}d^\dagger(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}d^\dagger(-\boldsymbol{p},\bar{s})|0\rangle.\end{aligned}\tag{3.184}$$

表明，在时间反演变换下，费米子的动量改变方向，自旋取向也反转.

3. 电磁场

在时间反演变换下，电磁场算符的变换为

$$\mathcal{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathcal{T}^{-1}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t),$$

在库仑规范下，上式两边的平面波展开为

$$\mathcal{T}\boldsymbol{A}(x)\mathcal{T}^{-1}=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[\mathcal{U}a(k,\lambda)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+\mathcal{U}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathcal{U}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}].\qquad(3.185)$$

而

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t)&=-\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}+a^{\dagger}(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}],\\&=-\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}].\end{aligned}$$

如图 3.1 所示，

$$\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},1)=-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},1),\quad\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},2)=\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},2),$$

即

$$\boldsymbol{\varepsilon}(-\boldsymbol{k},\lambda)=(-1)^{\lambda}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{k},\lambda),$$

故

$$-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t)=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{(-1)^{\lambda+1}\boldsymbol{\varepsilon}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}+a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}].$$

与(3.185)式相等得

$$\begin{aligned}\mathcal{U}a(k,\lambda)\mathcal{U}^{-1}&=(-1)^{\lambda+1}a(-\boldsymbol{k},\lambda),\\\mathcal{U}a^{\dagger}(k,\lambda)\mathcal{U}^{-1}&=(-1)^{\lambda+1}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda).\end{aligned}\qquad(3.186)$$

$$\mathcal{U}a^{\dagger}(k,\lambda)|0\rangle=(-1)^{\lambda+1}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle.\qquad(3.187)$$

可见，在时间反演变换下，光子的动量 $\boldsymbol{k}$ 改变方向，而偏振方向不变. 不同极化的光子，时间宇称是不同的，$\lambda=1$ 的光子其时间宇称为正，$\lambda=2$ 的光子其时间宇称为负.

在圆偏振的情况下

$$\begin{aligned}a^{\dagger}(k,+)&=a^{\dagger}(k,1)+\mathrm{i}a^{\dagger}(k,2),\\a^{\dagger}(k,-)&=a^{\dagger}(k,1)-\mathrm{i}a^{\dagger}(k,2).\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}\mathcal{T}a^{\dagger}(k,+)\mathcal{T}^{-1}&=\mathcal{U}a^{\dagger}(k,1)\mathcal{U}^{-1}-\mathrm{i}\mathcal{U}a^{\dagger}(k,2)\mathcal{U}^{-1}\\&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},1)+\mathrm{i}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},2)\\&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},+).\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\mathcal{T}a^{\dagger}(k,-)\mathcal{T}^{-1}&=\mathcal{U}a^{\dagger}(k,1)\mathcal{U}^{-1}+\mathrm{i}\mathcal{U}a^{\dagger}(k,2)\mathcal{U}^{-1}\\&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},1)-\mathrm{i}a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},2)\\&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},-).\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\mathcal{T}a^{\dagger}(k,+)|0\rangle&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},+)|0\rangle,\\\mathcal{T}a^{\dagger}(k,-)|0\rangle&=a^{\dagger}(-\boldsymbol{k},-)|0\rangle.\end{aligned}\qquad(3.188)$$

可见，在时间反演变换下，光子的动量 $\boldsymbol{k}$ 要改变方向，极化状态不变，而左旋、右旋光子的时间宇称是相同的.

3.9　相对论性的对易关系

在正则量子化中，正则坐标与正则动量的对易关系取成形式

$$\left.\begin{array}{l}[\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ [\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \phi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]=0,\quad [\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)]=0\end{array}\right.\quad(\text{玻色子场}),$$

$$\left.\begin{array}{l}\{\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}=\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}\,\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ \{\phi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \phi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}=0,\quad \{\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \pi_\beta(\boldsymbol{x}',t)\}=0\end{array}\right.\quad(\text{费米子场}),$$

这些对易关系的一个重要特点是：它们都是等时的，即对易式中，两正则变量中的时间是相同的. 从相对论的观点来看，等时是非相对论性的，在一个惯性系中是等时的事件，在另外的惯性系中将是不等时的. 所以，上述的等时对易子是非相对论的，不够完美. 这里将对上述对易关系进行修改，将它们表示成非等时的、相对论性的对易关系. 为此，定义标量场、狄拉克场及电磁场的对易子

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)=[\phi(x_1),\ \phi^*(x_2)],\\ &\mathrm{i}S_{\alpha\beta}(x_1-x_2)=\{\psi_\alpha(x_1),\ \bar{\psi}_\beta(x_2)\},\\ &\mathrm{i}D_{\mu\nu}(x_1-x_2)=[A_\mu(x_1),\ A_\nu(x_2)].\end{aligned}\tag{3.189}$$

下面来具体求一下，上述对易关系的表达式.

3.9.1　标量场

标量场算符的平面波展开为

$$\phi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],$$

代入(3.189)式得

$$\begin{aligned}&[\phi(x_1),\ \phi^*(x_2)]\\ =&\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1},\ a^\dagger(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}+b(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}]\\ =&\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2}-\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1-\mathrm{i}k'\cdot x_2})\\ =&\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2V\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}],\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{k}$ 可正可负，所以

$$[\phi(x_1),\ \phi^*(x_2)]=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}]$$

$$= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)} \int dk_0 \varepsilon(k_0) \delta(k^2-m^2) e^{-ik_0(t_1-t_2)}$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^3} \varepsilon(k_0) \delta(k^2-m^2) e^{-ik\cdot(x_1-x_2)},$$

上式第二个等号用到了(3.88)式,其中

$$\varepsilon(k_0)=\Theta(k_0)-\Theta(-k_0),$$

Θ 为阶跃函数

$$\Theta(k_0)=\begin{cases}1 & (k_0>0),\\ 0 & (k_0<0).\end{cases}$$

下面来证明

$$\frac{1}{2\omega}\left[e^{-i\omega(t_1-t_2)}-e^{i\omega(t_1-t_2)}\right]=\int dk_0 \varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik_0(t_1-t_2)}.$$

由于

$$\delta(k^2-m^2)=\delta(k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2)=\delta(k_0^2-\omega^2)$$
$$=\frac{1}{2\omega}\left[\delta(k_0+\omega)+\delta(k_0-\omega)\right],$$

则

$$\int dk_0 \varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik_0(t_1-t_2)}$$
$$=\int dk_0\left[\Theta(k_0)-\Theta(-k_0)\right]\frac{1}{2\omega}\left[\delta(k_0+\omega)+\delta(k_0-\omega)\right]e^{-ik_0(t_1-t_2)}$$
$$=\frac{1}{2\omega}\int dk_0\left[\Theta(k_0)\delta(k_0-\omega)-\Theta(-k_0)\delta(k_0+\omega)\right]e^{-ik_0(t_1-t_2)}$$
$$=\frac{1}{2\omega}\left[e^{-i\omega(t_1-t_2)}-e^{i\omega(t_1-t_2)}\right], \Rightarrow \text{问题得证.}$$

这样,标量场算符的对易关系为

$$i\Delta(x_1-x_2)=\left[\phi(x_1),\phi^*(x_2)\right]$$
$$=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2V\omega}\left[e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}-e^{ik\cdot(x_1-x_2)}\right]$$
$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}\left[e^{-i\omega(t_1-t_2)}-e^{i\omega(t_1-t_2)}\right]$$
$$=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)e^{-ik\cdot(x_1-x_2)}. \qquad (3.190)$$

3.9.2　狄拉克场

狄拉克场的平面波展开式为

$$\psi(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}\left[c(p,s)u(p,s)e^{-ip\cdot x}+d^\dagger(p,s)v(p,s)e^{ip\cdot x}\right],$$

将其代入(3.189)式得

$$\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(x_1),\bar{\psi}_\beta(x_2)\}\\
&=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sum_{\boldsymbol{p}'s'}\frac{m}{V\sqrt{EE'}}\{c(p,s)u_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}+d^\dagger(p,s)v_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1},\\
&\quad c^\dagger(p',s')\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_2}+d(p',s')\bar{v}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_2}\}\\
&=\sum_{\boldsymbol{p}s}\sum_{\boldsymbol{p}'s'}\frac{m}{V\sqrt{EE'}}[\delta_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}\delta_{ss'}u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1+\mathrm{i}p'\cdot x_2}+\delta_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{p}'}\delta_{ss'}v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1-\mathrm{i}p'\cdot x_2}]\\
&=\sum_{\boldsymbol{p}s}\frac{m}{VE}[u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}+v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}],
\end{aligned}$$

注意到(1.42)式

$$\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(x_1),\bar{\psi}_\beta(x_2)\}\\
&=\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2VE}[(\gamma\cdot p+m)_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}+(\gamma\cdot p-m)_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}]\\
&=(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2VE}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}]\\
&=(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2).
\end{aligned}$$

这样,狄拉克场算符的对易关系为

$$\mathrm{i}S_{\alpha\beta}(x_1-x_2)=(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu+m)_{\alpha\beta}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2).\tag{3.191}$$

3.9.3 电磁场

在洛伦兹规范下,电磁场的平面波展开式为

$$A_\mu(x)=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],$$

代入(3.189)式得

$$\begin{aligned}
&[A_\mu(x_1),A_\nu(x_2)]\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1},a(k',\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}+\bar{a}(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}]\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2}-\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1-\mathrm{i}k'\cdot x_2})\\
&=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)}{2V\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}]\\
&\xlongequal{(1.114)\text{式}}-g_{\mu\nu}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2V\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}]\\
&=-g_{\mu\nu}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2,m=0).
\end{aligned}$$

这样,电磁场算符的对易关系为

$$\mathrm{i}D_{\mu\nu}(x_1-x_2)=-g_{\mu\nu}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2,m=0).\tag{3.192}$$

3.9.4　相对论对易子的特点

由(3.191)与(3.192)两式可知,狄拉克场与电磁场算符的对易子与标量场的对易子有线性联系,所以它们的对易子的性质与特点是相同的,都由标量场算符的对易子

$$\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\delta(k^2-m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}\tag{3.193}$$

决定.(3.193)式右边有四个因子,其中指数因子中的 $k\cdot(x_1-x_2)$ 是两个四维矢量 k^μ 和 $(x_1-x_2)_\mu$ 的标积,是洛伦兹不变量,$\delta(k^2-m^2)$ 函数中的 k^2 是矢量 k^μ 与 k_μ 的标积,也是洛伦兹不变量,而 $\delta(k^2-m^2)$ 使得 $k^2=m^2>0$,亦即 $k^2=k_0^2-\boldsymbol{k}^2>0$,所以 $k_\mu=(k_0,\boldsymbol{k})$ 是类时空间的四维矢量.这样,在正时($a_{00}>0$,这里的 a 与 2.5 节中的一样,是洛伦兹变换矩阵)、固有($\det a=+1$)洛伦兹变换下,k_0 的正、负不变,因此 $\varepsilon(k_0)=\Theta(k_0)-\Theta(-k_0)$ 在洛伦兹变换下也不变.另外,在洛伦兹变换下,$\mathrm{d}^4k\Rightarrow\mathrm{d}^4k'=J\mathrm{d}^4k$,其中 $J=|\det a|=1$ 是雅可比行列式,所以 $\mathrm{d}^4k'=\mathrm{d}^4k$.这样,对易子 $\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)$ 在洛伦兹变换下是不变的,是相对论性的,同样与 $\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)$ 呈线性关系的 $\mathrm{i}S(x_1-x_2)$ 和 $\mathrm{i}D(x_1-x_2)$ 也是相对论性的.

由(3.190)式知

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)&=[\phi(x_1),\ \phi^*(x_2)]\\&=\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}],\end{aligned}\tag{3.194}$$

对于等式,$t_1=t_2=t$,

$$\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2,t_1=t_2=t)=[\phi(\boldsymbol{x}_1,t),\ \phi^*(\boldsymbol{x}_2,t)]=0,\tag{3.195}$$

与前面得到的(3.48)式相一致.对(3.194)式中的 t_2 求导数得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_2}\mathrm{i}\Delta(x_1-x_2)&=\frac{\partial}{\partial t_2}[\phi(x_1),\ \phi^*(x_2)]\\&=\frac{\partial}{\partial t_2}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}]\\&=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}],\end{aligned}$$

对于等式,$t_1=t_2=t$,

$$[\phi(\boldsymbol{x}_1,t),\ \dot{\phi}^*(\boldsymbol{x}_2,t)]=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2),$$

亦即

$$[\phi(\boldsymbol{x}_1,t),\ \pi(\boldsymbol{x}_2,t)]=\mathrm{i}\delta^3(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2),$$

其中,$\pi(\boldsymbol{x}_2,t)=\dot{\phi}^*(\boldsymbol{x}_2,t)$,上式与前面的(3.46)式相一致.由此可见,等时对易子是相对论性对易子的特例.

3.10　自由传播子

自由传播子又称为两点格林(Green)函数. 有标量场自由传播子、狄拉克场自由传播子与电磁场自由传播子之分,它们在相互作用的量子场论中具有十分重要的应用. 本节将对它们作一专门的讨论,给出它们的定义,计算出它们的表达式,阐述它们的物理意义.

定义　将两个场算符编时乘积的真空平均值

$$\langle 0|T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2)|0\rangle, \tag{3.196}$$

称为传播子,若场算符是自由场算符,就叫做自由传播子. 式中的符号"T"代表编时操作,定义为

$$T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2)=\begin{cases}\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2) & (t_1>t_2),\\ \pm\phi_\beta(x_2)\phi_\alpha(x_1) & (t_2>t_1).\end{cases} \tag{3.197}$$

当算符 $\phi_\alpha(x_1)$、$\phi_\beta(x_2)$都是费米子算符时,上式中的"±"号中取"−"号,其他情况取"+"号. 采用阶跃函数 $\Theta(t)$,(3.197)式可变写成

$$T\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2)=\Theta(t_1-t_2)\phi_\alpha(x_1)\phi_\beta(x_2)\pm\Theta(t_2-t_1)\phi_\beta(x_2)\phi_\alpha(x_1), \tag{3.198}$$

对于标量场、狄拉克场与电磁场,其传播子分别定义为

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}\Delta_f(x_1-x_2)=\langle 0|T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle,\\&\mathrm{i}S_f(x_1-x_2)=\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle,\\&\mathrm{i}D_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=\langle 0|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle.\end{aligned} \tag{3.199}$$

将各自由场算符的平面波展开式代入上式,就可以得到各自由传播子的具体表达式.

3.10.1　标量场

自由标量场的平面波展开由(3.51a)式给出,为

$$\phi(x)=\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}],$$

将其代入(3.198)与(3.199)式得

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle\\&=\Theta(t_1-t_2)\langle 0|\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle+\Theta(t_2-t_1)\langle 0|\phi^\dagger(x_2)\phi(x_1)|0\rangle\\&=\Theta(t_1-t_2)\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|[a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1}][a^\dagger(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}+b(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}]|0\rangle\\&\quad+\Theta(t_2-t_1)\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|[a^\dagger(k')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}+b(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}][a(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+b^\dagger(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1}]|0\rangle\end{aligned}$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|[a(k)a^\dagger(k')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2}]|0\rangle$$

$$+\Theta(t_2 - t_1)\sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|[b(k')b^\dagger(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2+\mathrm{i}k\cdot x_1}]|0\rangle$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}}\sum_{\boldsymbol{k}'}\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}[\Theta(t_1 - t_2)\delta_{\boldsymbol{kk}'}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2} + \Theta(t_2 - t_1)\delta_{\boldsymbol{kk}'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1-\mathrm{i}k'\cdot x_2}]$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{2V\omega}[\Theta(t_1 - t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)} + \Theta(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}]. \tag{3.200}$$

注意到 $\boldsymbol{k}$ 可正可负，所以

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle$$

$$= \sum_{\boldsymbol{k}}\frac{1}{V}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}[\Theta(t_1 - t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)} + \Theta(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}]$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)}\frac{1}{2\omega}[\Theta(t_1 - t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)} + \Theta(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}].$$

下面将证明上式中的

$$\frac{1}{2\omega}[\Theta(t_1 - t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)} + \Theta(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}] = \int\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}, \tag{3.201}$$

其中，ε 是一无穷小量. 这样，标量场的传播子为

$$\mathrm{i}\Delta_f(x_1 - x_2) = \langle 0|T\phi(x_1)\phi^\dagger(x_2)|0\rangle$$

$$= \int\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}. \tag{3.202}$$

其中的被积函数

$$\mathrm{i}\Delta_f(k) = \frac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}, \tag{3.203}$$

为动量空间标量场的传播子. 对(3.202)式两边求导得

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Delta_f(x_1 - x_2) = \int\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}$$

$$= -\int\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)},$$

亦即

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\Delta_f(x_1 - x_2) = -\delta^4(x_1 - x_2). \tag{3.204}$$

可见，传播因子 $\Delta_f(x_1 - x_2)$是点源克莱因-戈尔登方程的解，由于源点由 x_1 与 x_2 两点组成，所以有时亦称 $\Delta_f(x_1 - x_2)$为克莱因-戈尔登方程的两点格林函数.

例 3.12　证明(3.201)式.

证明　(3.201)式等号右边被积函数的分母

$$k_0^2-\boldsymbol{k}^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon=k_0^2-\omega^2+\mathrm{i}\varepsilon=(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon),$$

则被积函数有两个极点

$$k_0=\omega-\mathrm{i}\varepsilon,\quad k_0=-\omega+\mathrm{i}\varepsilon,$$

如图 3.2 所示.

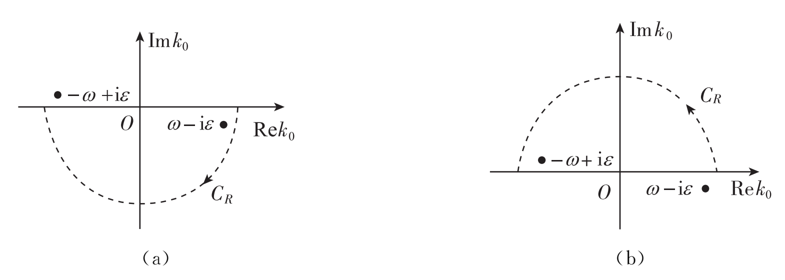


图 3.2　(a)k_0 复平面上的两极点与下半积分圆 C_R；(b)k_0 复平面上的两极点与上半积分圆 C_R

(3.201)式右边的积分是沿实轴进行的，当 $t_1>t_2$ 时，将积分扩充成包含下半圆 C_R 的闭合回路积分，如图 3.2(a)所示，积分沿顺时针方向进行，则

$$\begin{aligned}&\oint\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}\\&=\int_{(\text{实轴})}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}.\end{aligned}$$

由于 $t_1>t_2$，并注意到被积函数的分母$=k_0^2-\omega^2$，则在 C_R 上，当 C_R 的半径 $R\Rightarrow\infty$ 时，|被积函数|$\Rightarrow 0$，因此由约当定理知，上式沿 C_R 的积分 $\Rightarrow 0$. 这样

$$\begin{aligned}&\int_{(\text{实轴})}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}\\&=\oint\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}\\&=-2\pi\mathrm{i}\times\text{极点}(k_0=\omega-\mathrm{i}\varepsilon)\text{处的留数}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}}{2\omega}.\end{aligned}$$

其中，“−”号来源于顺时针方向的回路积分.

当 $t_1<t_2$ 时，将沿实轴的积分扩充为沿上半圆 C_R 的闭合回路积分，如图 3.2(b)所示，积分沿逆时针方向，则

$$\begin{aligned}&\oint\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}\\&=\int_{(\text{实轴})}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}.\end{aligned}$$

与上面同样的理由，上式第二项 $\Rightarrow 0$，故

$$\int_{(\text{实轴})}\frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0-\omega+\mathrm{i}\varepsilon)(k_0+\omega-\mathrm{i}\varepsilon)}$$

$$= \oint \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{(k_0 - \omega + \mathrm{i}\varepsilon)(k_0 + \omega - \mathrm{i}\varepsilon)}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \times \text{极点}(k_0 = -\omega + \mathrm{i}\varepsilon)\text{处的留数} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}}{2\omega}.$$

这样

$$\int \frac{\mathrm{d}k_0}{2\pi} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_0(t_1-t_2)}}{k_0^2 - \boldsymbol{k}^2 - m^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{2\omega}[\Theta(t_1 - t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)} + \Theta(t_2 - t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(t_1-t_2)}], \Rightarrow (3.201)\text{式得证}.$$

3.10.2 狄拉克场

自由狄拉克场的平面波展开由(3.68)式给出，为

$$\psi(x) = \sum_{ps} \sqrt{\frac{m}{VE}} [c(p,s)u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + d^\dagger(p,s)v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}],$$

将其代入(3.198)与(3.199)式得

$$\langle 0 | T\psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) | 0\rangle$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\langle 0 | \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2) | 0\rangle - \Theta(t_2 - t_1)\langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_1) | 0\rangle$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\langle 0 | [c(p,s)u_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1} + d^\dagger(p,s)v_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}]$$

$$\times [c^\dagger(p',s')\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_2} + d(p',s')\bar{v}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_2}] | 0\rangle$$

$$-\Theta(t_2 - t_1)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\langle 0 | [c^\dagger(p',s')\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_2} + d(p',s')\bar{v}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_2}]$$

$$\times [c(p,s)u_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1} + d^\dagger(p,s)v_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}] | 0\rangle$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\langle 0 | c(p,s)c^\dagger(p',s')u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1 + \mathrm{i}p'\cdot x_2} | 0\rangle$$

$$-\Theta(t_2 - t_1)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\langle 0 | d(p',s')d^\dagger(p,s)\bar{v}_\beta(p',s')v_\alpha(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1 - \mathrm{i}p'\cdot x_2} | 0\rangle$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\delta_{pp'}\delta_{ss'}u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1 + \mathrm{i}p'\cdot x_2}$$

$$-\Theta(t_2 - t_1)\sum_{ps}\sum_{p's'} \frac{m}{V\sqrt{EE'}}\delta_{pp'}\delta_{ss'}v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1 - \mathrm{i}p'\cdot x_2}$$

$$= \sum_{ps} \frac{m}{VE}[\Theta(t_1 - t_2)u_\alpha(p,s)\bar{u}_\beta(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)} - \Theta(t_2 - t_1)v_\alpha(p,s)\bar{v}_\beta(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}]$$

$$\overset{(1.42)\text{式}}{=\!=\!=} \sum_{p} \frac{m}{VE}\left[\Theta(t_1 - t_2)\frac{(\gamma\cdot p + m)_{\alpha\beta}}{2m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)} - \Theta(t_2 - t_1)\frac{(\gamma\cdot p - m)_{\alpha\beta}}{2m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}\right]$$

$$= \sum_{p} \frac{1}{2VE}[\Theta(t_1 - t_2)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)} + \Theta(t_2 - t_1)(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}]$$

$$= (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1}{2VE}[\Theta(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}+\Theta(t_2-t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}],$$

注意到(3.200)式,狄拉克场的传播子为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}S_f(x_1-x_2) &= (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)\mathrm{i}\Delta_f(x_1-x_2)\\ &= (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu + m)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)},\end{aligned}$$

又

$$(\gamma\cdot p)^2=\gamma^\mu p_\mu\gamma^\nu p_\nu=\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu)p_\mu p_\nu=g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu,$$

亦即

$$(\gamma\cdot p)^2=p^\mu p_\mu=p^2=E^2-\boldsymbol{p}^2. \tag{3.205}$$

所以

$$\mathrm{i}S_f(x_1-x_2)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}, \tag{3.206}$$

其中的被积函数

$$\mathrm{i}S_f(p)=\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}, \tag{3.207}$$

为动量空间狄拉克场的传播子.对(3.206)式求导得

$$\begin{aligned}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_f(x_1-x_2) &= (\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x_1-x_2)},\end{aligned}$$

亦即

$$(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)S_f(x_1-x_2)=\delta^4(x_1-x_2). \tag{3.208}$$

表明传播子 $S_f(x_1-x_2)$ 是点源狄拉克方程的解,亦即 $S_f(x_1-x_2)$ 是狄拉克方程的两点格林函数.

3.10.3 电磁场

洛伦兹规范下,自由电磁场的平面波展开由(3.102)式给出,为

$$A_\mu(x)=\sum_{k\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}]$$

代入(3.198)与(3.199)式得

$$\begin{aligned}&\langle 0|TA_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle\\ &=\Theta(t_1-t_2)\langle 0|A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)|0\rangle+\Theta(t_2-t_1)\langle 0|A_\nu(x_2)A_\mu(x_1)|0\rangle\\ &=\Theta(t_1-t_2)\sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\\ &\quad\times\langle 0|[a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1}][a(k',\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}+\bar{a}(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}]|0\rangle\end{aligned}$$

$$+\Theta(t_2-t_1)\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}$$

$$\times\langle 0|[a(k',\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2}+\bar{a}(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_2}][a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1}+\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1}]|0\rangle$$

$$=\Theta(t_1-t_2)\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|a(k,\lambda)\bar{a}(k',\lambda')|0\rangle\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2}$$

$$+\Theta(t_2-t_1)\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\langle 0|a(k',\lambda')\bar{a}(k,\lambda)|0\rangle\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1-\mathrm{i}k'\cdot x_2}$$

$$=\Theta(t_1-t_2)\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_1+\mathrm{i}k'\cdot x_2}$$

$$+\Theta(t_2-t_1)\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\sum_{\boldsymbol{k}'\lambda'}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k',\lambda')}{2V\sqrt{\omega\omega'}}\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\delta_{\lambda\lambda'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1-\mathrm{i}k'\cdot x_2}$$

$$=\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)e_\nu(k,\lambda)}{2V\omega}[\Theta(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}+\Theta(t_2-t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}]$$

$$\xlongequal{(1.114)\text{式}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{-g_{\mu\nu}}{2V\omega}[\Theta(t_1-t_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}+\Theta(t_2-t_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}].$$

再由(3.200)式知

$$\mathrm{i}D_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=-g_{\mu\nu}\mathrm{i}\Delta_f(x_1-x_2,m=0),\tag{3.209}$$

亦即电磁场的传播子为

$$\mathrm{i}D_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=-g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon},\tag{3.210}$$

其中的被积函数

$$\mathrm{i}D_{f\mu\nu}(k)=-\frac{\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon},\tag{3.211}$$

为动量空间电磁场的传播子.对(3.210)式两边求导得

$$\partial^\lambda\partial_\lambda D_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=g_{\mu\nu}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)},$$

亦即

$$\partial^\lambda\partial_\lambda D_{f\mu\nu}(x_1-x_2)=g_{\mu\nu}\delta^4(x_1-x_2),\tag{3.212}$$

表明电磁场传播子是波动方程的两点格林函数.

3.10.4　传播子的意义

按定义,自由传播子是两个自由场算符编时乘积的真空平均值.自由场算符是一系列不同能量或频率平面波的线性叠加,叠加系数就是产生或消灭算符,其中产生算符是负能或负频波的展开系数,消灭算符是正能或正频波的展开系数.这样,两个自由场算符编时乘积中的每一项都包含有两个算符的乘积,其一般形式为 $a(k)a(k')$, $a(k)a^\dagger(k')$, $a^\dagger(k)a(k')$, $a^\dagger(k)a^\dagger(k')$, $a(k)b^\dagger(k')$, $b(k)a^\dagger(k')$ 等,由于非共轭的两算

符是对易的,它们的真空平均值不为零的只有

$$\langle 0|a(k)a^{\dagger}(k')|0\rangle=\delta_{kk'}\text{等},$$

表明只有那些先产生一个粒子,并随后又消灭掉同一个粒子的项,才对自由传播子有贡献,也就是说,自由传播子描述的是粒子产生并随即湮灭的过程,该过程的粒子是一种虚粒子,不具有实际的可测量效应,所以动量空间的传播子,如(3.203)、(3.207)与(3.211)式,其动量是任意的,可以不满足质壳关系 $\boldsymbol{p}^2+m^2=E^2$ 或 $p^2=m^2$,而传播子中的两个时空点 x_1 与 x_2 的物理意义也就变得很清楚了:一个是虚粒子的产生点,另一个是其随后的湮灭点.

第 4 章　电磁作用的阿贝尔规范理论与微扰展开

前面讨论的都是自由场，没有涉及场间的相互作用，实际上，自由场是不存在的，场总是以一定的形式相互作用着.

现在人们已经知道，基本的相互作用有四种：电磁作用、强作用、弱作用和引力作用. 电磁作用存在于荷电粒子之间，如靠电磁作用，原子核与核外电子构成原子，原子又构成分子，分子或原子又构成大千物质世界. 靠强相互作用，核子（质子 p＋中子 n）构成原子核，夸克构成核子及强子，而原子核的 β 衰变是弱作用引发的，引力作用存在于任何两个物体之间，支配着宇宙间天体的运动.

电磁作用的量子理论是一种阿贝尔规范理论，习惯称为量子电动力学或 QED（quantum electrodynamics）. 弱作用与强作用的量子理论都是非阿贝尔规范理论，前者习惯称之为量子味动力学或 QFD（quantum flavor dynamics），后者为量子色动力学或 QCD（quantum chromodynamics）. 人们普遍认为，引力也是一种规范作用，相应的理论叫做超引力理论. 但由于其作用强度太弱了，目前还没有任何这方面的实验结果. 在理论方面，由于存在着重整化（参见后面第 6 章）的困难，这方面的研究工作一直进展不畅.

规范理论认为，四种基本相互作用应该可以统一地被描述. 目前人们已成功地将弱、电作用统一成 GWS（Glashow - Weinberg - Salam）弱电统一规范理论，人们一直在努力，试图将弱、电、强三种作用统一起来，称为大统一理论，最终的目标是将弱、电、强、引力四种作用统一起来，称为超统一理论.

相互作用的规范理论有两大共性，一是对称性，二是可重整性. 前者也是自由场所具有的特性，后者是相互作用理论所独有的. 由前面的讨论知，自由场的运动要遵守各种守恒定律，如能量守恒、动量守恒及角动量守恒等，而这些守恒定律都起因于时空均匀及各向同性等对称性，所以说，对称性决定着自由场的运动. 不仅如此，人们认为：对称性是如此地广泛存在和重要，它不但支配着自由场的运动，也同样主导着场间的相互作用，决定着场的相互作用形式. 与自由场不同，自由场的运动方程可精确求解，其解就是前面所说的平面波的叠加，而相互作用场的方程太复杂了，精确求解几乎不可能，常用的处理方法是微扰展开，而微扰展开的高阶项总是发散的，需设法将其消除掉，这就是重整化. 因此，为了使相互作用的理论有意义，它必须具有可重整性.

本章将以电磁作用的阿贝尔规范理论为例，讨论场的相互作用问题及相互作用场的处理方法——微扰展开.

4.1　电磁作用的阿贝尔规范理论

电磁作用理论,无论是经典的麦克斯韦理论,还是量子化的阿贝尔规范理论,都是最精确、最成功的理论之一,下面将从对称性的要求出发引入电磁作用,给出电磁作用的形式.

4.1.1　自由场的整体规范不变性

自由的标量场 ϕ、旋量场 ψ 与电磁场 A_μ 的拉格朗日密度为

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}_\phi=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi-m^2\phi^*\phi,\\&\mathscr{L}_\psi=\bar{\psi}(\mathrm{i}r^\mu\partial_\mu-m)\psi,\\&\mathscr{L}_A=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\quad F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.\end{aligned}\tag{4.1}$$

由第 2 章的讨论知,在时空平移、洛伦兹变换和 PCT 变换下,它们都是不变的.

在内部空间,即除时空以外的空间,定义规范变换

$$\begin{aligned}&\phi\Rightarrow\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\phi,\quad\phi^*\Rightarrow\phi'^*=\phi^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)},\\&\psi\Rightarrow\psi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\psi,\quad\bar{\psi}\Rightarrow\bar{\psi}'=\bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(x)},\\&A_\mu\Rightarrow A'_\mu=A_\mu-\frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).\end{aligned}\tag{4.2}$$

显然,这是将 ϕ、ψ 的绕轴转动和 A_μ 的规范变换合在一起的一种变换.

若 $\theta(x)$ 与时空坐标 x 无关,即 $\theta(x)=\theta$ 是一常数,则称这样的变换为整体规范变换.由于

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\theta=0,\quad A'_\mu=A_\mu,\\&\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi,\quad\phi'^*=\phi^*\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\\&\psi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\psi,\quad\bar{\psi}'=\bar{\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\end{aligned}\tag{4.3}$$

即时空各点的 ϕ、ψ 都转过同一角度,而此时场量的导数和场量一样变换,即

$$\begin{aligned}&\partial_\mu\phi\Rightarrow\partial_\mu\phi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\partial_\mu\phi,\\&\partial_\mu\psi\Rightarrow\partial_\mu\psi'=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\partial_\mu\psi,\end{aligned}\tag{4.4}$$

这样

$$\begin{aligned}&\phi^*\phi\Rightarrow\phi'^*\phi'=\phi^*\phi,\\&\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi\Rightarrow\partial_\mu\phi'^*\partial^\mu\phi'=\partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi,\end{aligned}$$

因此

$$\mathscr{L}_\phi\Rightarrow\mathscr{L}'_\phi=\mathscr{L}_\phi.$$

又

$$\begin{aligned}&\bar{\psi}\psi\Rightarrow\bar{\psi}'\psi'=\bar{\psi}\psi,\\&\bar{\psi}\partial_\mu\psi\Rightarrow\bar{\psi}'\partial_\mu\psi'=\bar{\psi}\partial_\mu\psi,\end{aligned}$$

所以

$$\mathscr{L}_\psi \Rightarrow \mathscr{L}'_\psi = \mathscr{L}_\psi.$$

另外，由(4.3)式知

$$\mathscr{L}_A \Rightarrow \mathscr{L}'_A = \mathscr{L}_A.$$

由此可见，自由场的拉格朗日密度在整体规范变换下是不变的，由 Noether 定理知：存在相应的守恒定律，其守恒流与守恒荷由(2.138)～(2.140)式给出，即

$$\begin{aligned} &j^\mu = 0, \quad Q = 0, \quad \text{实标量场与电磁场}, \\ &j^\mu = -\mathrm{i}(\partial^\mu\phi^*\phi - \partial^\mu\phi\phi^*), \quad Q = -\mathrm{i}\int(\dot{\phi}^*\phi - \dot{\phi}\phi^*)\mathrm{d}^3x, \quad \text{复标量场}, \\ &j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad Q = \int\psi^\dagger\psi\mathrm{d}^3x, \quad \text{旋量场}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.1.2 定域规范不变性与场的相互作用

当(4.2)式中的 $\theta(x)$ 与时空坐标 x 有关，即 $\partial_\mu\theta(x)\neq 0$，则称这样的变换为定域规范变换. 由(1.98)式知，当

$$A_\mu \Rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x)$$

时，

$$F_{\mu\nu} \Rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad \mathscr{L}_A \Rightarrow \mathscr{L}'_A = \mathscr{L}_A.$$

即在定域规范变换下，$\mathscr{L}_A$ 是不变的.

而这时的 ϕ、ψ，在各时空点的转角 $\theta(x)$ 是不同的，这样场量导数的变换不再与场量的变换相同，因为

$$\partial_\mu\phi \Rightarrow \partial_\mu\phi' = \partial_\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\phi] \neq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\partial_\mu\phi,$$

$$\partial_\mu\psi \Rightarrow \partial_\mu\psi' = \partial_\mu[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\psi] \neq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta(x)}\partial_\mu\psi.$$

因此，在定域规范变换下，自由场的拉格朗日密度不再是不变的，即

$$\mathscr{L}_\phi \Rightarrow \mathscr{L}'_\phi \neq \mathscr{L}_\phi, \quad \mathscr{L}_\psi \Rightarrow \mathscr{L}'_\psi \neq \mathscr{L}_\psi.$$

但是，人们认为，场的运动与相互作用是如此地有序，以至于描述它的规律的拉格朗日密度在(4.2)式所示的规范变换下，不管 θ 是否与时空坐标 x 有关，即不管是整体规范变换，还是定域规范变换，它都应该保持不变. 为了做到这一点，将拉格朗日密度 $\mathscr{L}_\phi$ 与 $\mathscr{L}_\psi$ 中场量的时空导数换成协变导数

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu, \tag{4.6}$$

则在定域规范变换下，场的协变导数变换为

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_\alpha \Rightarrow D'_\mu\phi'_\alpha &= (\partial_\mu - \mathrm{i}eA'_\mu)\phi'_\alpha \\ &= \left[\partial_\mu - \mathrm{i}e\left(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\phi_\alpha \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(-\mathrm{i}\partial_\mu\theta + \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu\theta)\phi_\alpha \end{aligned}$$

$$=e^{-i\theta}(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi = e^{-i\theta}D_\mu\phi_\alpha,$$

这样对于标量场

$$\phi^*\phi \Rightarrow \phi^{*\prime}\phi' = \phi^*\phi,$$
$$(D_\mu\phi)^* D^\mu\phi \Rightarrow (D'_\mu\phi')^* D'^\mu\phi' = (D_\mu\phi)^* D^\mu\phi.$$

所以,拉格朗日密度

$$\mathcal{L}_{\phi+i} = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi - m^2\phi^*\phi \tag{4.7}$$

在定域规范变换下不变.同样对于旋量场

$$\bar{\psi}\psi \Rightarrow \bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi,$$
$$\bar{\psi}D_\mu\psi \Rightarrow \bar{\psi}'D'_\mu\psi' = \bar{\psi}D_\mu\psi,$$

则

$$\mathcal{L}_{\psi+i} = \bar{\psi}i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{4.8}$$

在定域规范变换下具有不变性.对于电磁场

$$F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

所以(4.6)式的变换不影响电磁场的拉格朗日密度,即引入协变导数后,电磁场的拉格朗日密度仍然是定域规范不变的.

由(4.7)式知,在标量场 ϕ 与电磁场 A_μ 间存在相互作用时,规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\phi+i} + \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_i, \tag{4.9a}$$

其中

$$\mathcal{L}_\phi = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi,$$
$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.9b}$$
$$\mathcal{L}_i = ie(\phi^*\partial_\mu\phi - \partial_\mu\phi^*\phi)A^\mu + e^2A^2\phi^*\phi,$$

其中,$\mathcal{L}_\phi$ 与 $\mathcal{L}_A$ 是自由场的拉格朗日密度,$\mathcal{L}_i$ 是相互作用场的拉格朗日的密度,即标量场 ϕ 与 ϕ^* 通过电磁场 A_μ 而相互作用.

由(4.8)式知,对于旋量场 ψ 的电磁作用,规范不变的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\psi+i} + \mathcal{L}_A = \mathcal{L}_\psi + \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_i, \tag{4.10a}$$

其中

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi,$$
$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.10b}$$
$$\mathcal{L}_i = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

$\mathcal{L}_i$ 是相互作用场的拉格朗日密度,即 $\bar{\psi}$ 与 ψ 通过电磁场 A_μ 而相互作用.

由此可见,相互作用拉格朗日密度 $\mathcal{L}_i$ 的出现与形式,完全是在假设场的拉格朗日密度在(4.2)式的定域规范变换下具有不变性或对称性时得到的,因此对称性决定

相互作用,这是一种我们耳熟能详的说法.另外,由 $\mathscr{L}_i$ 的表达式知,两粒子间不能直接产生电磁作用,二者间只能通过规范场——光子场来传递作用.所以定域规范不变的本质在于产生了传递作用的规范场,表明粒子间的相互作用只能通过中间媒质——规范场才能实现,超距的即时作用是不存在的,这一结论对于其他规范作用也成立.

(4.2)式中的指数函数 $e^{i\theta(x)}$ 构成 $U(1)$ 群,即

$$U(1)=e^{i\theta(x)}, \tag{4.11}$$

称为电磁作用规范变换群,该群是一阿贝尔群,不同的群元素间彼此对易.由上面的讨论知:电磁作用的拉格朗日密度在 $U(1)$ 群的规范变换下具有不变性或对称性.据此,我们通常说电磁作用是一种 $U(1)$ 规范或阿贝尔规范理论.在规范变换下拉格朗日密度保持不变是所有规范作用理论的共同特点.当然,不同的规范理论其规范变换群不同,如弱电统一规范理论的规范变换群是 $SU(2)\otimes U(1)$ 群,量子色动力学的规范变换群是 $SU(3)$ 群,由于两者都是非阿贝尔群,所以与电磁作用不同,弱电统一规范理论与量子色动力学都是非阿贝尔规范理论.

4.1.3 相互作用场的运动方程

将(4.9)与(4.10)式代入拉格朗日方程(2.8),即

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha}-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi_\alpha}=0,$$

就可得到相互作用场的运动方程.

对于标量场 ϕ 的电磁作用,将(4.9b)诸式代入上式得

$$\begin{aligned}&(\partial_\mu-ieA_\mu)(\partial^\mu-ieA^\mu)\phi+m^2\phi=0,\\&(\partial_\mu+ieA_\mu)(\partial^\mu+ieA^\mu)\phi^*+m^2\phi^*=0,\\&\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=ie(\phi\partial^\nu\phi^*-\phi^*\partial^\nu\phi)-2e^2A^\nu\phi^*\phi.\end{aligned}\tag{4.12}$$

对于旋量场 ψ 的电磁作用

$$\begin{aligned}&i\gamma^\mu(\partial_\mu-ieA_\mu)\psi-m\psi=0,\\&\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=-e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi.\end{aligned}\tag{4.13}$$

以上两式表明,对于相互作用场的运动方程,A_μ 与 ϕ 或 A_μ 与 ψ 相互纠缠在一起,都是非线性方程,所幸的是,通过适当的处理,可避开对它们的直接求解,具体办法在后面的 4.2 节中将作讨论.

例 4.1 证明(4.12)与(4.13)式.

证明 由(4.9b)诸式得

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi^*}=-m^2\phi+ie\partial_\mu\phi A^\mu+e^2A^2\phi,\quad \partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}=\partial_\mu(\partial^\mu\phi-ie\phi A^\mu),$$

代入拉格朗日方程得

$$\partial_\mu(\partial^\mu\phi-\mathrm{i}e\phi A^\mu)+m^2\phi-\mathrm{i}e\partial_\mu\phi A^\mu-e^2A^2\phi=0,$$

亦即

$$(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)(\partial^\mu-\mathrm{i}eA^\mu)\phi+m^2\phi=0,\ \Rightarrow\ (4.12)\text{第 1 式得证.}$$

又如

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\nu}=\mathrm{i}e(\phi^*\partial^\nu\phi-\partial^\nu\phi^*\phi)+2e^2\phi^*\phi A^\nu,$$

而

$$\begin{aligned}\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu}&=\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_A}{\partial\partial_\mu A_\nu}\\&\overset{(2.41\text{式})}{=\!=\!=}\partial_\mu\frac{\partial}{\partial\partial_\mu A_\nu}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu+\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu\partial^\nu A^\mu\right)\\&=\partial_\mu(-\partial^\mu A^\nu+\partial^\nu A^\mu),\end{aligned}$$

故由拉格朗日方程得

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=\mathrm{i}e(\phi\partial^\nu\phi^*-\phi^*\partial^\nu\phi)-2e^2A^\nu\phi^*\phi,\ \Rightarrow\ (4.12)\text{第 3 式得证.}$$

另由(4.10b)诸式得

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}=(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi+e\gamma^\mu\psi A_\mu,\quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}}=0,$$

故得运动方程

$$\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)\psi-m\psi=0,\ \Rightarrow\ (4.13)\text{第 1 式得证.}$$

又

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu A_\nu}=e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi,\quad \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\nu}=\partial_\mu(-\partial^\mu A^\nu+\partial^\nu A^\mu),$$

故得运动方程

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)=-e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi,\ \Rightarrow\ (4.13)\text{第 2 式得证.}$$

4.1.4 库仑规范下相互作用场的量子化

这里将以旋量场 ψ 的电磁作用为例,讨论相互作用场的量子化问题,先讨论库仑规范.

在库仑规范下,$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$,$A_0=0$,由(2.42)式知,自由电磁场的

$$\mathcal{L}_A=-\frac{1}{2}\partial_iA_j\partial^iA^j-\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i,$$

代入(4.10a)式得该情况下的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-\frac{1}{2}\partial_iA_j\partial^iA^j-\frac{1}{2}\dot{A}_i\dot{A}^i+e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\tag{4.14}$$

上式含有时间导数 $\dot{\psi}$ 与 $\dot{\mathbf{A}}$,表明相互作用系统的正则坐标为 ψ 与 $\mathbf{A}$,与之相应的正则动量分别为

$$\begin{aligned}\pi&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^{\dagger},\\ \pi_i&=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^i}=-\dot{A}_i=\dot{A}^i.\end{aligned}\tag{4.15}$$

由(3.16)式知,描述场的哈密顿量为

$$\begin{aligned}H&=\int\mathcal{H}\,\mathrm{d}^3x,\\ \mathcal{H}&=\pi_i\dot{A}^i+\mathrm{i}\psi^{\dagger}\dot{\psi}-\mathcal{L}=\mathcal{H}_{\psi}+\mathcal{H}_A+\mathcal{H}_i,\end{aligned}\tag{4.16a}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\psi}&=\psi^{\dagger}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla+\beta m)\psi,\\ \mathcal{H}_A&=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{A}}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}+\nabla A^i\cdot\nabla A^i),\\ \mathcal{H}_i&=-e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A^{\mu}.\end{aligned}\tag{4.16b}$$

分别是自由旋量场、电磁场及相互作用场的哈密顿密度[参见(2.39)与(2.44)式].

量子化后,正则变量 ψ、$\mathrm{i}\psi^{\dagger}$、$\boldsymbol{A}$ 及 $\dot{\boldsymbol{A}}$ 都是算符,按照正则量子化的方法,它们满足如(3.64)与(3.85)式所示的对易关系,即

$$\begin{aligned}&\{\psi_{\alpha}(\boldsymbol{x},t),\ \psi_{\beta}^{\dagger}(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\ &[A^i(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}^j(\boldsymbol{x}',t)]=\mathrm{i}\left(\delta^{ij}-\frac{\partial^i\partial^j}{\nabla^2}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').\end{aligned}\tag{4.17}$$

其他非共轭的算符都对易或反对易,而正则运动方程为

$$\begin{aligned}&\dot{\psi}=\mathrm{i}[H,\ \psi],\quad \dot{\psi}^{\dagger}=\mathrm{i}[H,\ \psi^{\dagger}],\\ &\dot{A}^i=\mathrm{i}[H,\ A^i],\quad \ddot{A}^i=\mathrm{i}[H,\ \dot{A}^i].\end{aligned}\tag{4.18}$$

将(4.16)式中的各量代入,参考(3.67)与(3.87)式的证明过程,由(4.18)中的第1与第4式,可分别得到库仑规范下(4.13)式的两运动方程,作为练习,读者可自证之.

4.1.5 洛伦兹规范下相互作用场的量子化

在洛伦兹规范下,$\partial^{\mu}A_{\mu}=0$,由(3.95)式知,自由电磁场的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}_A=-\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu}=-\frac{1}{2}\dot{A}_{\nu}\dot{A}^{\nu}+\frac{1}{2}\nabla A_{\nu}\cdot\nabla A^{\nu},$$

代入(4.10a)式得该情况下的拉格朗日密度为

$$\mathcal{L}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\psi-\frac{1}{2}\dot{A}_{\nu}\dot{A}^{\nu}+\frac{1}{2}\nabla A_{\nu}\cdot\nabla A^{\nu}+e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu},\tag{4.19}$$

上式含有时间导数 $\dot{\psi}$ 与 $\dot{A}_{\mu}$,表明 ψ 与 A_{μ} 是系统的正则坐标,相应的正则动量分别为

$$\pi=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}=\mathrm{i}\psi^{\dagger},\quad \pi^{\mu}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}_{\mu}}=-\dot{A}^{\mu}.$$

而哈密顿量为

$$
\begin{aligned}
&H=\int \mathscr{H}\,\mathrm{d}^3x,\\
&\mathscr{H}=\pi^\mu\dot{A}_\mu+\mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi}-\mathscr{L}=\mathscr{H}_\psi+\mathscr{H}_A+\mathscr{H}_i,
\end{aligned}
\tag{4.20a}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{H}_\psi=\psi^\dagger(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)\psi,\\
&\mathscr{H}_A=-\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{A}}_\mu\dot{\boldsymbol{A}}^\mu+\boldsymbol{\nabla}A_\mu\cdot\boldsymbol{\nabla}A^\mu),\\
&\mathscr{H}_i=-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu.
\end{aligned}
\tag{4.20b}
$$

量子化后,洛伦兹条件变为

$$\langle\phi|\partial^\mu A_\mu(x)|\phi\rangle=0,$$

正则变量 ψ、$\mathrm{i}\psi^\dagger$、A_μ 及 $\dot{A}_\mu$ 都成为算符,满足如(3.64)与(3.99)式所示的对易关系,即

$$
\begin{aligned}
&\{\psi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\ \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{x}',t)\}=\delta_{\alpha\beta}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'),\\
&[A_\mu(\boldsymbol{x},t),\ \dot{A}_\nu(\boldsymbol{x}',t)]=-\mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}').
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

其他非共轭的算符对易或反对易.正则运动方程为

$$
\begin{aligned}
&\dot{\psi}=\mathrm{i}[H,\ \psi],\quad \dot{\psi}^\dagger=\mathrm{i}[H,\ \psi^\dagger],\\
&\dot{A}_\mu=\mathrm{i}[H,\ A_\mu],\quad \ddot{A}_\mu=\mathrm{i}[H,\ \dot{A}_\mu].
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

将(4.20)代入上式中的第 1 与第 4 式可得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\gamma^\mu(\partial_\mu-\mathrm{i}eA_\mu)\psi-m\psi=0,\\
&\partial_\nu\partial^\nu A_\mu=-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi.
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

(4.23)即为(4.13)式在洛伦兹规范下的形式.

例 4.2　证明(4.23)式.

证明　由(4.22)第 1 式得

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\dot{\psi}_\lambda &= [H,\ \psi_\lambda(x)]\\
&=\int \mathrm{d}^3x'[\mathscr{H}(x'),\ \psi_\lambda(x)]\\
&=\int \mathrm{d}^3x'[\psi^\dagger(x')_\alpha(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)^{\alpha\beta}\psi(x')_\beta-e\psi_\alpha^\dagger(x')(\gamma_0\gamma_\mu)^{\alpha\beta}\psi_\beta(x')A^\mu(x'),\ \psi_\lambda(x)],
\end{aligned}
$$

由

$$[AB,\ C]=A\{B,\ C\}-\{A,\ C\}B$$

知

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\dot{\psi}_\lambda &= \int \mathrm{d}^3x'\{\psi^\dagger(x')_\alpha,\ \psi_\lambda(x)\}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\beta m)^{\alpha\beta}\psi(x')_\beta\\
&\quad-\int \mathrm{d}^3x'\{\psi^\dagger(x')_\alpha,\ \psi_\lambda(x)\}e(\gamma_0\gamma_\mu)^{\alpha\beta}\psi_\beta(x')A^\mu(x')
\end{aligned}
$$

$$= \int d^3x' \delta_{\alpha\lambda} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') [(-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)^{\alpha\beta} - e(\gamma_0\gamma_\mu)^{\alpha\beta} A^\mu(x')] \psi(x')_\beta$$

$$= (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m)_\lambda^\beta \psi(x)_\beta - e(\gamma_0\gamma_\mu)_\lambda^\beta \psi(x)_\beta A^\mu(x),$$

亦即

$$i\dot{\psi} + (i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} - \beta m)\psi + e\gamma_0\gamma_\mu\psi A^\mu = 0,$$

或

$$i\gamma_0\dot{\psi} + i\gamma_0\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + e\gamma_\mu\psi A^\mu - m\psi = 0,$$

亦即

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu)\psi - m\psi = 0, \Rightarrow \text{(4.23)第 1 式得证.}$$

同理,将(4.20)代入(4.22)第 4 式得

$$-i\ddot{A}_\mu(x) = [H, \dot{A}_\mu(x)]$$

$$= \int d^3x' \left[-\frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla}' A^\nu(x') \cdot \boldsymbol{\nabla}' A_\nu(x') - e\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x')A_\nu(x'), \dot{A}_\mu(x) \right],$$

亦即

$$i\ddot{A}_\mu(x) = \int d^3x' \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla}' A^\nu(x') \cdot \boldsymbol{\nabla}' A_\nu(x') + e\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x')A_\nu(x'), \dot{A}_\mu(x) \right]$$

$$= \int d^3x' \{ \boldsymbol{\nabla}' A^\nu(x') \cdot \boldsymbol{\nabla}' [A_\nu(x'), \dot{A}_\mu(x)] + e\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x')[A_\nu(x'), \dot{A}_\mu(x)] \}$$

$$= -ig_{\mu\nu} \int d^3x' [\boldsymbol{\nabla}' A^\nu(x') \cdot \boldsymbol{\nabla}' \delta^3(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + e\bar{\psi}(x')\gamma^\nu\psi(x')\delta^3(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})]$$

$$= i\boldsymbol{\nabla}^2 A_\mu - ie\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

因此

$$\ddot{A}_\mu(x) = \boldsymbol{\nabla}^2 A_\mu - e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

或

$$\partial_\nu\partial^\nu A_\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x), \Rightarrow \text{(4.23)第 2 式得证.}$$

4.2　相互作用表象和微状展开

上一节,在假设场的拉格朗日密度具有规范对称性,即在规范变换(4.2)的变换下具有不变性的情况下,引入了协变导数(4.6),从而改写了拉格朗日密度,得到了场的电磁作用项,同时也给出了相互作用的场方程(4.12)与(4.13)式.理论上,要得到不同场的表达式,需要求解这些方程,但由于这些方程巨大的复杂性,这条路很难行得通,需另想办法,这就是本节将要讨论的问题.

4.2.1　表象无关性

在量子理论中,描述力学系统的基本量是态矢 $|a\rangle$ 和算符 A,但两者都没有经典

对应,不存在实际的可测量效应,也没有直接的物理意义.有经典对应的是态矢的模方和算符的平均值,如

$$\langle a|a\rangle,\ |\langle a|A|a\rangle,\cdots.$$

任取一幺正算符 U 作变换,就可将一表象中的态矢和算符变换成另一表象中的态矢和算符

$$|a\rangle'=U|a\rangle,A'=UAU^{-1},U^{+}=U^{-1},\tag{4.24}$$

新表象中的态矢与算符和旧表象中的态矢和算符显然是不同的,但是态矢的模方和算符的平均值却保持不变,如

$$'\langle a|a\rangle'=\langle a|U^{+}U|a\rangle=\langle a|a\rangle,$$

$$'\langle a|A'|a\rangle'=\langle a|U^{+}UAU^{-1}U|a\rangle=\langle a|A|a\rangle.\tag{4.25}$$

表明由态矢 $|a\rangle$ 和算符 A 描述的物理过程的可测量量在不同的表象中是相同的,物理规律不会因表象的变换而发生变化,这称为表象无关性.这种表象无关性,会给我们带来很大的方便.我们可以在任意的表象中处理问题,什么表象方便,就采用什么表象.

4.2.2　三种常用表象

由一种表象,通过一幺正算符 U 作变换,如(4.24)式,就可以得到另一种表象.幺正算符 U 是任意的,有无穷多种,因此由一种表象可以得到无穷多种表象.而最常采用的表象有三种:薛定谔表象、海森伯(Heisenberg)表象与相互作用表象.

薛定谔表象我们很熟悉,一般的量子力学采用的都是这种表象,在该表象中,算符不随时间变化,而态矢遵循薛定谔波动方程,即

$$\dot{A}^{s}=0,\quad \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^{s}=H^{s}|a\rangle^{s},\tag{4.26}$$

其中上角标“s”代表薛定谔表象,H^{s} 为场的哈密顿量.在存在相互作用时,取

$$H^{s}=H_{0}^{s}+H_{i}^{s},$$

其中,H_{0}^{s} 为自由场的哈密顿量,H_{i}^{s} 为相互作用场的哈密顿量.

取幺正算符

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{s}t},$$

用它对薛定谔表象中的算符与态矢作如下幺正变换

$$A^{h}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{s}t}A^{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^{s}t},\quad |a\rangle^{h}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}H^{s}t}|a\rangle^{s},\tag{4.27}$$

就可以得到海森伯表象中的算符与态矢,其中上角标“h”表示海森伯表象,它们满足运动方程

$$\dot{A}^{h}=\mathrm{i}[H^{h},A^{h}],\quad \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^{h}=0,\tag{4.28}$$

即算符遵循正则运动方程,态矢不随时间变化,在第 3 章讨论自由场时,用的就是这

种表象.由(4.27)式可以看出

$$H^s = H^h, \tag{4.29}$$

即在薛定谔与海森伯两表象中,场的哈密顿量相同.

再用幺正算符

$$U = e^{iH_0^s t} \tag{4.30}$$

对薛定谔表象中的算符与态矢作如下幺正变换

$$A^I = e^{iH_0^s t} A^s e^{-iH_0^s t}, \quad |a\rangle^I = e^{iH_0^s t} |a\rangle^s, \tag{4.31}$$

就得到相互作用表象中的算符和态矢,其中上角标"I"表示相互作用表象,它们满足运动方程

$$\dot{A}^I = i[H_0^I, A^I], \quad i\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^I = H_i^I |a\rangle^I, \tag{4.32}$$

(4.32)式表明:在相互作用表象中,算符的运动仅由自由场的哈密顿决定,而态矢随时间的变化仅由相互作用的哈密顿决定.由(4.31)式知

$$H_0^I = H_0^s, \tag{4.33}$$

即在相互作用与薛定谔表象中,自由场的哈密顿量相同.

(4.26)、(4.28)及(4.32)三式给出了三种表象的各自特点,(4.27)与(4.31)两式是薛定谔表象与海森伯及相互作用表象间的关系.以后我们将采用相互作用表象,略去角标"I",(4.32)式变为

$$\dot{A} = i[H_0, A], \quad i\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle = H_i |a\rangle. \tag{4.34}$$

采用相互作用表象的优点是显而易见的:场算符的运动仅由自由场的哈密顿 H_0 决定,也就是说,场算符遵循的实际上是自由场算符的运动方程,其解在前面第3章已给出,为如下式所示的平面波解

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} [a(k) e^{-ik\cdot x} + b^\dagger(k) e^{ik\cdot x}], \\
\psi(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}s} \sqrt{\frac{m}{VE}} [c(p,s) u(p,s) e^{-ip\cdot x} + d^\dagger(p,s) v(p,s) e^{ip\cdot x}], \\
A_\mu(x) &= \sum_{\boldsymbol{k}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega}} e_\mu(k,\lambda) [a(k,\lambda) e^{-ik\cdot x} + \bar{a}(k,\lambda) e^{ik\cdot x}].
\end{aligned} \tag{4.35}$$

这样,在相互作用表象中讨论场的相互作用时,场算符就如同相互作用不存在一样,可继续沿用自由场算符的结果,从而避开了精确求解方面所遇到的困难,也使得前期的工作派上了用场,用以解决实际的物理问题.剩下的事情就是如何求解态矢的运动方程

$$i\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle = H_i |a\rangle, \tag{4.36}$$

求得态矢$|a\rangle$,相互作用量子场论的基本问题——态矢与算符两基本量的确定问题

也就解决了.

例 4.3　证明(4.28)与(4.32)式.

证明　由(4.27)式得

$$\dot{A}^h = \mathrm{i}H^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^s t} A^s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^s t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^s t} \dot{A}^s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^s t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^s t} A^s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H^s t} (-\mathrm{i}H^s)$$

$$\xlongequal{(4.26)式} \mathrm{i}H^s A^h - \mathrm{i}A^h H^s$$

$$\xlongequal{(4.29)式} \mathrm{i}[H^h, A^h], \Rightarrow \text{(4.28)第 1 式得证.}$$

又由(4.27)式得

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^h = -H^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^s t}|a\rangle^s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H^s t}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^s$$

$$\xlongequal{(4.26)式} 0, \Rightarrow \text{(4.28)第 2 式得证.}$$

由(4.31)式得

$$\dot{A}^I = \mathrm{i}H_0^s A^I - \mathrm{i}A^I H_0^s \xlongequal{(4.33)式} \mathrm{i}[H_0^I, A^I], \Rightarrow \text{(4.32)第 1 式得证.}$$

再由(4.31)式得

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^I &= -H_0^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t}|a\rangle^s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}|a\rangle^s \\
&= -H_0^s \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t}|a\rangle^s + \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t} H^s |a\rangle^s \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t}(H^s - H_0^s)|a\rangle^s \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t} H_i^s |a\rangle^s \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t} H_i^s \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0^s t} \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0^s t}|a\rangle^s \\
&\xlongequal{(4.31)式} H_i^I |a\rangle^I, \Rightarrow \text{(4.32)第 2 式得证.}
\end{aligned}$$

4.2.3　*U* 矩阵

为了求解方程(4.36),引入算符 $U(t,t_0)$,称为 U 矩阵,定义为

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle, \tag{4.37}$$

它使 t_0 时的状态 $|t_0\rangle$,变成 t 时刻的状态 $|t\rangle$,所以有时亦称 $U(t,t_0)$ 为运动算符. 由该定义可直接推知,它有如下性质

$$\begin{aligned}
&U(t_0,t_0) = 1, \\
&U(t',t)U(t,t_0) = U(t',t_0), \\
&U^{-1}(t,t_0) = U(t_0,t).
\end{aligned} \tag{4.38}$$

将(4.37)代入(4.36)式得

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_i(t)U(t,t_0), \tag{4.39}$$

取厄米得

$$-\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}U^{\dagger}(t,t_0)=U^{\dagger}(t,t_0)H_i(t).\tag{4.40}$$

这里假设相互作用的哈密顿算符是厄米的,即 $H_i^{\dagger}=H_i$. 用 $U^{\dagger}$左乘(4.39)式减去 U 右乘(4.40)式得

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}[U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)]=0,\tag{4.41}$$

表明 $U^{\dagger}U$ 是与时间无关的常数,由于 $U^{\dagger}(t_0,t_0)U(t_0,t_0)=1$,所以该常数$=1$,故

$$U^{\dagger}(t,t_0)U(t,t_0)=1,\tag{4.42}$$

亦即

$$U^{\dagger}(t,t_0)=U^{-1}(t,t_0),\tag{4.43}$$

因此算符 $U(t,t_0)$是幺正的.

由算符 $U(t,t_0)$的定义(4.37)式知,如果知道了它的具体形式,就知道了态矢的运动,因此求解态矢运动方程(4.36)的问题,就变成了求算符 $U(t,t_0)$的问题,它满足运动方程和初始条件

$$\mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=H_i(t)U(t,t_0),\quad U(t_0,t_0)=1.\tag{4.44}$$

将(4.44)式积分得

$$U(t,t_0)=1-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1H_i(t_1)U(t_1,t_0).\tag{4.45}$$

现在来求解该积分方程.

4.2.4 微扰展开与迭代解

(4.45)式中的第二项与相互作用哈密顿 $H_i(x)$有关,而 $H_i(x)$与耦合常数成正比,当耦合常数是一个小于 1 的小量时,如电磁作用、弱作用、近距离的色作用等都是如此,该项就是一个小于 1 的小量,从而可将其看成是第一项的微扰项. 这样就可以采用迭代法,对(4.45)式一级一级地求解下去,实现对$U(t,t_0)$的微扰展开. 具体到电磁作用,其耦合常数 $e\simeq0.3$[参见(0.21)与(4.16b)或(4.20b)式],随着展开级次的增加,其贡献迅速变小,解的性质将主要取决于微扰展开的前几项,所以微扰展开是处理电磁作用的一种有效方法.

在零级近似下,(4.45)式的第二项略去不计,得

$$U^{(0)}(t,t_0)=1,\tag{4.46}$$

它是(4.45)式的零阶解,是$U(t,t_0)$的主要项,后续各项是对该项的进一步修正. 在一级近似下,(4.45)式第二项中的 U 取作 $U=U^{(0)}=1$,得 $U^{(0)}(t,t_0)$的一级修正

$$U^{(1)}(t,t_0)=-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1H_i(t_1),\tag{4.47}$$

在二级近似下,(4.45)式第二项中的 U 取成 $U=U^{(1)}$,得 $U^{(0)}(t,t_0)$ 的二级修正

$$U^{(2)}(t,t_0)=-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_i(t_1)U^{(1)}(t_1,t_0)=(-i)^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2). \tag{4.48}$$

如此逐级进行下去得

$$U^{(n)}(t,t_0)=(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n H_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n), \tag{4.49}$$

而(4.45)式的迭代解为

$$\begin{aligned}U(t,t_0)&=\sum_{n=0}U^{(n)}(t,t_0)\\&=1-\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 H_i(t_1)+(-\mathrm{i})^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2)+\cdots\\&\quad+(-\mathrm{i})^n\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n H_i(t_1)H_i(t_2)\cdots H_i(t_n).\end{aligned} \tag{4.50}$$

显然,微扰展开的项数越多,该迭代解就越接近于(4.45)式的精确解.为得到一定精确度的解,耦合常数越小,需要微扰展开的项数越少,反之越多,当耦合常数$\geqslant 1$时,如低能量时的 QCD,微扰展开法就完全不可用了.

由(4.50)式可以看出,只要知道了相互作用的哈密顿 H_i,完成对时间 t 的多重积分,就可以求得 $U(t,t_0)$.在该式中,对时间积分的上限是不同的,采用编时乘积 T,就可以将它们变成相同的了,如

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 H_i(t_1)H_i(t_2)\\&=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\Theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)\\&=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\mathrm{d}t_1 H_i(t_2)H_i(t_1)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\Theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1)\\&=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2[\Theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)+\Theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1)].\end{aligned}$$

由于在 H_i 中,若有费米子算符,就必以双旋量的形式出现,所以 H_i 的对易性质就像玻色子算符一样,这样

$$TH_i(t_1)H_i(t_2)=\Theta(t_1-t_2)H_i(t_1)H_i(t_2)+\Theta(t_2-t_1)H_i(t_2)H_i(t_1),$$

因此

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 H_i(t_1) H_i(t_2) = \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 T H_i(t_1) H_i(t_2). \tag{4.51}$$

将上式推广到 n 重时间积分，就有

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} \mathrm{d}t_n H_i(t_1) H_i(t_2) \cdots H_i(t_n) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n T H_i(t_1) H_i(t_2) \cdots H_i(t_n),$$

这样 U 矩阵的迭代解(4.50)式就可以写成

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= \sum_{n=0} U^{(n)}(t,t_0), \\ U^{(n)}(t,t_0) &= \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n T H_i(t_1) H_i(t_2) \cdots H_i(t_n). \end{aligned} \tag{4.52}$$

4.2.5 $\boldsymbol{S}$ 矩阵

S 矩阵的定义是

$$S = U(\infty, -\infty), \tag{4.53}$$

即 S 矩阵是特殊的 U 矩阵，它使 $t=-\infty$时的状态，变成 $t=\infty$时的状态，它的迭代解是

$$S = \sum_n S^{(n)},$$

$$S^{(n)} = \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_n T H_i(t_1) H_i(t_2) \cdots H_i(t_n).$$

考虑到

$$H_i(t) = \int \boldsymbol{\mathscr{H}}_i(x) \mathrm{d}^3 x,$$

上式亦可写成

$$\begin{aligned} S &= \sum_n S^{(n)}, \\ S^{(n)} &= \frac{(-\mathrm{i})^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}^4 x_1 \mathrm{d}^4 x_2 \cdots \mathrm{d}^4 x_n T \boldsymbol{\mathscr{H}}_i(x_1) \boldsymbol{\mathscr{H}}_i(x_2) \cdots \boldsymbol{\mathscr{H}}_i(x_n). \end{aligned} \tag{4.54}$$

4.2.6 $\boldsymbol{S}$ 矩阵元

求得 U 矩阵后，相互作用场中的态矢由(4.37)式给出，即

$$|t\rangle = U(t,t_0)|t_0\rangle,$$

其中，$|t_0\rangle$是初始时刻的态矢. 在实际问题中，为了计算方便，人们通常将过程开始的时刻定在 $t_i=-\infty$，把过程终了的时刻定在 $t_f=\infty$，若用$|i\rangle$与$|f'\rangle$分别表示初始与末了时刻的状态，则上式变为

$$|f'\rangle = S|i\rangle. \tag{4.55}$$

初态 $|i\rangle$ 是一个确定的状态，末态 $|f'\rangle$ 是一种包含有多种可能的混合态，可以用一组正交归一的态矢 $|k\rangle$ 展开，即

$$|f'\rangle = S|i\rangle = \sum_k a_k |k\rangle, \tag{4.56}$$

其中 a_k 是末态中出现状态 $|k\rangle$ 的几率幅. 如前所述，态矢是没有直接的物理意义的，为了将它与经典量相联系，人们引入 S 矩阵元，定义为

$$a_f = S_{fi} = \langle f|S|i\rangle = \langle f|f'\rangle, \tag{4.57}$$

它是在末态中 $|f'\rangle$ 中出现状态 $|f\rangle$ 的几率幅，也就是说 $|a_f|^2 = |S_{fi}|^2$ 是由初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的几率.

4.2.7　绝热假设

如(4.57)式所示，S 矩阵元由初态 $|i\rangle$、末态 $|f\rangle$ 与 S 矩阵三部分组成，S 矩阵有如(4.54)式所示的迭代解，它由相互作用的哈密顿密度 $\mathcal{H}_i$ 确定. 在一定的相互作用中，$\mathcal{H}_i$ 有一定的形式，如在旋量场的电磁作用中，$\mathcal{H}_i$ 由(4.16b)或(4.20b)式给出，即

$$\mathcal{H}_i(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

其中的场算符，如前所述，在相互作用表象中，就是如(4.35)式所示的自由场算符，所以确定 S 矩阵元的问题，归结为如何确定初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 的问题.

$|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 是系统在 $t=-\infty$ 与 $t=\infty$ 的态. 为了确定它们，人们提出一种假设，叫做绝热假设，说的是：相互作用的哈密顿 H_i 只是在场间存在相互作用时有贡献，作用过后，H_i 将绝热地撤除，只剩下自由场的哈密顿 H_0. 换句话来说，H_i 只存在于场间有作用的那段时间，对于不存在作用的初态与末态，H_i 不存在，这时系统处在自由状态，其运动规律只受制于自由场的哈密顿 H_0. 这样一来，初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$ 都是 H_0 的本征态，可用自由粒子态来描述，而由第 3 章知，自由粒子态可由粒子的产生算符作用于真空态产生，如

$$|i\rangle, |f\rangle \sim a^\dagger b^\dagger c^\dagger\rangle|0\rangle,$$

这样一来，仅由自由场的结果，S 矩阵元就完全被确定了下来. 例如，在康普顿(Compton)散射中，动量为 k、极化为 λ 的光子，作用于动量为 p、自旋为 s 的电子，变成动量为 k'、极化为 λ' 的光子和动量为 p'、自旋为 s' 的电子，即

$$\gamma(k,\lambda) + e^-(p,s) \to \gamma(k',\lambda') + e^-(p',s'), \tag{4.58}$$

初态为

$$|i\rangle = a^\dagger(k,\lambda)c^\dagger(p,s)|0\rangle, \tag{4.59}$$

末态为

$$|f\rangle = a^\dagger(k',\lambda')c^\dagger(p',s')|0\rangle, \tag{4.60}$$

S 矩阵元为

$$S_{fi}=\langle 0|a(k',\lambda')c(p',s')Sa^{\dagger}(k,\lambda)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle. \tag{4.61}$$

剩下的问题是如何计算 S 矩阵元,如何将其与实验测量相联系,这是本章后面将要讨论的问题.

4.3 维克定理

由 4.2 节的讨论知,在相互作用的表象中,在绝热条件下,相互作用过程的 S 矩阵元可用自由场的场算符和态矢表示出来,但要对其进行具体的计算,其过程还是很复杂的,这是因为在 S 矩阵微扰展开的每一项中都包含着诸多场算符的编时乘积,每一场算符又展开为无穷多个平面波项,且随着展开阶数的增加,场算符的数目将急剧增加.本节将介绍场算符编时乘积的一种代数运算法,称为维克(Wick)定理,该定理将有助于简化 S 矩阵元的计算问题.

4.3.1 算符的正规乘积

S 矩阵中的每一项都由若干个产生算符和消灭算符的乘积组成,它们都对一定的过程起作用,如 S 矩阵

$$S\propto a^{\dagger}(k',\lambda')c^{\dagger}(p',s')a(k,\lambda)c(p,s), \tag{4.62}$$

将只对过程(4.58)起作用,而且其贡献就是该算符乘积的系数.因为

$$\begin{aligned}&\langle 0|a(k',\lambda')c(p',s')Sa^{\dagger}(k,\lambda)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle\\ &\propto\langle 0|a(k',\lambda')c(p',s')a^{\dagger}(k',\lambda')c^{\dagger}(p',s')a(k,\lambda)c(p,s)a^{\dagger}(k,\lambda)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle,\end{aligned}$$

由对易关系

$$[a(k,\lambda),\ a^{\dagger}(k',\lambda')]=\delta_{\boldsymbol{kk}'}\delta_{\lambda\lambda'},\quad \{c(p,s),\ c^{\dagger}(p',s')\}=\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}, \tag{4.63}$$

而算符 $a(k,\lambda)$ 与 $c(p,s)$ 是对易的,则

$$\langle 0|a(k',\lambda')c(p',s')a^{\dagger}(k',\lambda')c^{\dagger}(p',s')a(k,\lambda)c(p,s)a^{\dagger}(k,\lambda)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle=1.$$

在(4.62)式所示的 S 矩阵中,算符的排列是按照产生算符在左、消灭算符在右的顺序,如果不是这样,即产生算符与消灭算符有混合,例如,

$$S\propto a^{\dagger}(k',\lambda')a(k,\lambda)c(p,s)c^{\dagger}(p',s'),$$

则由对易关系(4.63)式,

$$S\propto a^{\dagger}(k',\lambda')a(k,\lambda)[\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}-c^{\dagger}(p',s')c(p,s)],$$

这样排列的 S 矩阵,将不只对过程(4.58)有贡献,还对过程 $\gamma(k,\lambda)\rightarrow\gamma(k',\lambda')$ 有作用.由此可见,要使 S 矩阵中的每一项算符乘积只对一个确定的过程有贡献,就必须将产生算符放在消灭算符的左边.我们将产生算符排列在消灭算符左边的算符乘积称为正规乘积.不过 4.2 节给出的 S 矩阵,其中的算符是按照时间序列排列的,为了计算的方便,就需要将按时间次序排列的算符乘积改编为正规乘积,这个改编规律就是维克定理.

4.3.2　算符的收缩与维克定理

为了介绍算符的收缩与维克定理，下面先定义两个算符 $A(t_1)$ 与 $B(t_2)$ 的编时乘积与正规乘积的关系.

如前所述每一场算符的平面波展开，都包括正频部分和负频部分，且正频部分的算符是消灭算符，负频部分的算符是产生算符. 用 A^+、B^+ 表示算符的正频部分，即表示消灭算符部分，用 A^-、B^- 表示算符的负频部分，即表示产生算符部分，将 A、B 算符分解为

$$A(t_1)=A^+(t_1)+A^-(t_1),\quad B(t_2)=B^+(t_2)+B^-(t_2),\tag{4.64}$$

算符的编时乘积定义为

$$\begin{aligned}TA(t_1)B(t_2)&=\Theta(t_1-t_2)A(t_1)B(t_2)\pm\Theta(t_2-t_1)B(t_2)A(t_1)\\&=\Theta(t_1-t_2)(A^++A^-)(B^++B^-)\pm\Theta(t_2-t_1)(B^++B^-)(A^++A^-),\end{aligned}\tag{4.65}$$

而算符的正规乘积定义为

$$\begin{aligned}:AB:&=:(A^++A^-)(B^++B^-):=A^+B^+\pm B^-A^++A^-B^++A^-B^-\\&=\pm:(B^++B^-)(A^++A^-):=\pm(B^+A^+\pm A^-B^++B^-A^++B^-A^-),\end{aligned}\tag{4.66}$$

当 A、B 都是费米子算符时，取“ $\pm$”号中的“$-$”号，其他情况取“$+$”号. 算符的收缩定义为

$$\underbrace{AB}=TAB-:AB:,\tag{4.67}$$

将(4.65)与(4.66)代入(4.67)式得

$$\begin{aligned}\underbrace{AB}&=\Theta(t_1-t_2)[A^+B^--(\pm)B^-A^+]\pm\Theta(t_2-t_1)[B^+A^--(\pm)A^-B^+]\\&=\Theta(t_1-t_2)[A^+,B^-]_\mp\pm\Theta(t_2-t_1)[B^+,A^-]_\mp.\end{aligned}\tag{4.68}$$

当 A、B 都是费米子算符时，取 $[A,B]_+=AB+BA$，其他情况，取 $[A,B]_-=AB-BA$. 由于产生、消灭算符的对易子或反对易子都是 C 数，因而(4.68)式表明，两个算符的收缩是 C 数.

将(4.67)式取真空平均值得

$$\langle 0|\underbrace{AB}|0\rangle=\langle 0|TAB|0\rangle-\langle 0|:AB:|0\rangle,$$

注意到算符的收缩为 C 数及正规乘积的定义，上式中的

$$\langle 0|\underbrace{AB}|0\rangle=\underbrace{AB},\quad \langle 0|:AB:|0\rangle=0,$$

故

$$\underbrace{AB}=\langle 0|TAB|0\rangle.\tag{4.69}$$

所以，两算符的收缩即为(3.196)式定义的传播子.

变写(4.67)式得

$$TAB=:AB:+\underbracket{AB},\ \Rightarrow\ TAB=:AB:+:\underbracket{AB}:,\tag{4.70}$$

即两算符的编时乘积等于算符的正规乘积加上含有一对算符收缩的正规乘积.将该结论推广到任意多个算符的编时乘积的情况就得到维克定理.

维克定理　算符的编时乘积,等于包含所有可能收缩的正规乘积之和.

如三个算符的编时乘积,改为正规乘积的结果就是

$$TABC=:ABC:+:\underbracket{AB}\,C:+:\wick{\c A B \c C}:+:A\underbracket{BC}:,\tag{4.71}$$

四个算符的编时乘积改为正规乘积就是

$$\begin{aligned}TABCD=&:ABCD:+:\underbracket{AB}\,CD:+:\wick{\c A B \c C} D:+:\wick{\c A B C \c D}:+:A\,\underbracket{BC}D:\\&:A\,\wick{\c B C \c D}:+:AB\,\underbracket{CD}:+:\underbracket{AB}\,\underbracket{CD}:+:\wick{\c1 A \c2 B \c1 C \c2 D}:+:\wick{\c1 A \c2 B \c2 C \c1 D}:,\end{aligned}\tag{4.72}$$

一般情况下

$$\begin{aligned}TA_1A_2\cdots A_n=&:A_1A_2\cdots A_n:\\&+\text{所有一次收缩的正规乘积}\\&+\text{所有二次收缩的正规乘积}\\&+\cdots.\end{aligned}\tag{4.73}$$

而收缩

$$:\wick{\c1 A \c2 B C \c3 D E \c3 F \cdots J \c1 K L \c2 M}:=\pm:CE\cdots JL:\underbracket{AK}\,\underbracket{BM}\,\underbracket{DF},\tag{4.74}$$

其中的“±”号取决于由顺序$(ABCDEF\cdots JKLM)$变为$(CE\cdots JL:AKBMDF)$所需要交换的费米子算符的次数.若交换的次数为偶数,取“+”号,反之取“−”号.

4.3.3　$S^{(1)}$矩阵

现在将维克定理用于旋量场电磁作用的情况,先讨论$S^{(1)}$矩阵编时乘积的正规乘积改编.

旋量场电磁作用的哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

则由(4.54)式知

$$S^{(1)}=\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4xTe\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).\tag{4.75}$$

按照维克定理

$$T\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x)=:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu:+:\bar{\psi}\gamma_\mu\underbracket{\psi A^\mu}:+:\underbracket{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu}:+:\underbracket{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi}A^\mu:.\tag{4.76}$$

由(4.69)式知

$$\underbracket{\psi A^\mu}=\langle 0|T\psi A^\mu|0\rangle=\langle 0|T(\psi^++\psi^-)(A^{\mu+}+A^{\mu-})|0\rangle,$$

由于ψ与A^μ算符对易,所以可将上式算符乘积中的产生算符移到消灭算符左边,而不产生附加项,而

$$a|0\rangle=0,\quad c|0\rangle=0\quad 或\quad \langle 0|a^{\dagger}=0,\langle 0|c^{\dagger}=0,$$

故

$$\underbracket{\psi A^{\mu}}=0, \tag{4.77}$$

同理

$$\underbracket{\bar{\psi} A^{\mu}}=0. \tag{4.78}$$

又由(4.67)式知

$$\underbracket{\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi}=T\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi-:\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi:, \tag{4.79}$$

亦即

$$\underbracket{\bar{\psi}_{\alpha}(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}\psi_{\beta}}=(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}(T\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta}-:\psi_{\alpha}\psi_{\beta}:)=(\gamma_{\mu})_{\alpha\beta}\underbracket{\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta}}. \tag{4.80}$$

注意到 $\bar{\psi}$ 与 ψ 的时空坐标相同,则由(4.68)式知

$$\underbracket{\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta}}=\Theta\{\bar{\psi}_{\alpha}^{+},\psi_{\beta}^{-}\}-\Theta\{\psi_{\beta}^{+},\bar{\psi}_{\alpha}^{-}\},$$

其中,Θ 为阶跃函数 $\Theta(t_1-t_2)$ 在 $t_1=t_2$ 时的值.由(4.35)式知

$$\bar{\psi}_{\alpha}^{+}=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}d(p,s)\bar{v}_{\alpha}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \psi_{\beta}^{-}=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}d^{\dagger}(p,s)v_{\beta}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},$$

$$\psi_{\beta}^{+}=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}c(p,s)u_{\beta}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\quad \bar{\psi}_{\alpha}^{-}=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}c^{\dagger}(p,s)\bar{u}_{\alpha}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}.$$

则

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}_{\alpha}^{+},\psi_{\beta}^{-}\}&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}\{d(p,s),d^{\dagger}(p',s')\}\bar{v}_{\alpha}(p,s)v_{\beta}(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\\&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}\bar{v}_{\alpha}(p,s)v_{\beta}(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\\&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\frac{m}{E}v_{\beta}(p,s)\bar{v}_{\alpha}(p,s).\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}\{\psi_{\beta}^{+},\bar{\psi}_{\alpha}^{-}\}&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}\{c(p,s),c^{\dagger}(p',s')\}u_{\beta}(p,s)\bar{u}_{\alpha}(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\\&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\sum_{p's'}\frac{m}{\sqrt{EE'}}\delta_{\boldsymbol{pp}'}\delta_{ss'}u_{\beta}(p,s)\bar{u}_{\alpha}(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}\\&=\frac{1}{V}\sum_{ps}\frac{m}{E}u_{\beta}(p,s)\bar{u}_{\alpha}(p,s).\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\underbracket{\bar{\psi}_{\alpha}\psi_{\beta}}&=\frac{\Theta}{V}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{m}{E}\sum_{s}[v_{\beta}(p,s)\bar{v}_{\alpha}(p,s)-u_{\beta}(p,s)\bar{u}_{\alpha}(p,s)]\\&\xlongequal{(1.48\text{式})}-\frac{\Theta}{V}\delta_{\alpha\beta}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{m}{E}.\end{aligned}$$

代入(4.80)式得

$$\underbracket{\bar{\psi}_\alpha(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\psi_\beta} = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(T\bar{\psi}_\alpha\psi_\beta - :\psi_\alpha\psi_\beta:) = -\frac{\Theta}{V}\sum_{p}\frac{m}{E}(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta},$$

故

$$\underbracket{\bar{\psi}\gamma_\mu\psi} = -\frac{\Theta}{V}\sum_{p}\frac{m}{E}\mathrm{Tr}\gamma_\mu = 0. \tag{4.81}$$

这样,同一时空点场量的各种可能收缩都为零,所以

$$T\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) = :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x):,$$

$$S^{(1)} = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x :\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x):,$$

其中的场算符有正、负频两部分,所以上式可写成

$$S^{(1)} = \mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4x :(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)\gamma_\mu(\psi^+ + \psi^-)(A^{\mu+} + A^{\mu-}):,$$

是 $2^3=8$ 个正规乘积之和.

4.3.4　$S^{(2)}$ 矩阵

由(4.54)式知,

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 T\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1A_1^\mu\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2A_2^\nu,$$

其中,场量的角标 1,2 表示时空点的坐标.按照维克定理及同一时空点各种可能的收缩都等于零,并考虑到

$$\underbracket{\psi_1\psi_2} = \langle 0|T(\psi_1^+ + \psi_1^-)(\psi_2^+ + \psi_2^-)|0\rangle,$$

由于 ψ_1 与 ψ_2 中的消灭与产生算符都反对易,所以可将上述算符乘积中的产生算符移到消灭算符的左边,除了出现一负号外不产生其他附加项,故

$$\underbracket{\psi_1\psi_2} = 0,$$

同理

$$\underbracket{\bar{\psi}_1\bar{\psi}_2} = 0,$$

这样上式中的编时乘积可写成

$$\begin{aligned}
T\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1A_1^\mu\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2A_2^\nu = {}& :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2A_1^\mu A_2^\nu: + :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2\underbracket{A_1^\mu A_2^\nu}: \\
& + :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbracket{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2A_1^\mu A_2^\nu: + :\underbracket{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2}A_1^\mu A_2^\nu: \\
& + :\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbracket{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2\underbracket{A_1^\mu A_2^\nu}: + :\underbracket{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1\bar{\psi}_2\gamma_\nu\psi_2}\underbracket{A_1^\mu A_2^\nu}: \\
& + :\overbracket{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbracket{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}A_1^\mu A_2^\nu: + :\overbracket{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbracket{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}\underbracket{A_1^\mu A_2^\nu}:,
\end{aligned}$$

共 8 项.再分成正、负频部分,就有

$$2^6+2^4+2^4+2^4+2^2+2^2+2^2+2^0=125$$

项,其中正规乘积 124 项.

4.4　旋量场电磁作用的费曼规则

前面定义的 S 矩阵元

$$S_{fi}=\langle f|S|i\rangle, \tag{4.82}$$

代表由初态 $|i\rangle$ 反应到末态 $|f\rangle$ 的几率幅,是粒子物理中经常用到的一个物理量,其中的 S 矩阵由(4.54)式给出,为

$$S=\sum_n S^{(n)},$$

$$S^{(n)}=\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\cdots\cdots\mathrm{d}^4x_n T\mathscr{H}_i(x_1)\mathscr{H}_i(x_2)\cdots\cdots\mathscr{H}_i(x_n),$$

对于旋量场的电磁作用

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

在相互作用表象中,各场量都是自由算符,有平面波解

$$\begin{aligned}
&\psi(x)=\psi^+(x)+\psi^-(x),\\
&\psi^+(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}c(p,s)u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\\
&\psi^-(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}d^\dagger(p,s)v(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},
\end{aligned}\tag{4.83a}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{\psi}(x)=\bar{\psi}^+(x)+\bar{\psi}^-(x),\\
&\bar{\psi}^+(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}d(p,s)\bar{v}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\\
&\bar{\psi}^-(x)=\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE}}c^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x},
\end{aligned}\tag{4.83b}$$

$$\begin{aligned}
&A_\mu(x)=A_\mu^+(x)+A_\mu^-(x),\\
&A_\mu^+(x)=\sum_{k\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}a(k,\lambda)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x},\\
&A_\mu^-(x)=\sum_{k\lambda}\frac{e_\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}.
\end{aligned}\tag{4.83c}$$

由 4.3 节介绍过的维克定理,按(4.73)式,可将 S 矩阵中的编时乘积展成包含所有可能收缩的正规乘积之和,且随着微扰展开阶数的增加,正规乘积的数目将急剧增加.每一收缩项要用掉两个场算符,收缩项越多,正规乘积变得越简单.对于一定的过程,有确定的初态 $|i\rangle$ 和末态 $|f\rangle$,按照绝热假设,它们都是自由粒子态,可由粒子的

产生算符作用于真空态形成. 而在 S 矩阵的众多正规乘积中,只有那些能消灭初态粒子并产生末态粒子的项才对过程有贡献,完成这种产生与消灭后,S_{fi} 中只剩下了四维时空积分,完成这些积分就可最终得到过程的反应几率幅了. 下面将对具体过程做具体的计算,找出 S 矩阵元与表示反应过程的图形符号——费曼(Feynman)图之间的对应关系,得到费曼规则,以简化 S 矩阵元的计算.

4.4.1　电子对湮灭为光子与费曼规则 Ⅰ

动量为 p、自旋为 s 的电子和动量为 q、自旋为 τ 的正电子,湮灭为动量为 k、极化为 λ 的光子,其过程可表示为

$$e^{-}(p,s)+e^{+}(q,\tau)\rightarrow\gamma(k,\lambda),\tag{4.84}$$

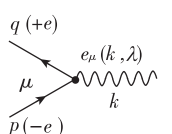


图 4.1　正负电子湮灭为光子的费曼图

该过程通常可以用费曼图形象地表示出来,在该图中,采用图形 •∿∿∿ 表示光子的产生或消灭,称为光子外线,意指一端(带点端,与顶点相连)固定,另一端自由的线段. 用图形 •—▶— 表示费米子的产生(或反费米子的消灭),用图形 —▶—• 表示费米子的消灭(或反费米子的产生),两者亦称为费米子外线. 用 >•∿∿ 表示两费米子与光子间的相互作用,称为顶角,它由两条费米子线、一条光子线外加一个圆点组成. 这样,过程(4.84)的费曼图如图 4.1 所示.

过程的初态和末态分别为

$$|i\rangle=d^{\dagger}(q,\tau)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle,\quad |f\rangle=a^{\dagger}(k,\lambda)|0\rangle,\tag{4.85}$$

决定该过程的是电磁作用,其哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).$$

与该过程有关的 S 矩阵是那些包含消灭初态正负电子对、产生末态光子的项,如

$$\begin{aligned}S^{(1)}&=\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x:\bar{\psi}^{+}\gamma_\mu\psi^{+}A^{\mu-}:,\\ S^{(3)}&=-\frac{(-\mathrm{i}e)^3}{3!}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3:\bar{\psi}_1^{+}\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}\gamma_\lambda\psi_3^{+}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}A_3^{\lambda-}:+\cdots,\\ &\cdots,\end{aligned}\tag{4.86}$$

满足条件的 S 矩阵有无穷多项,如果仅限于最低级近似,其 S 矩阵元就是

$$S_{fi}^{(1)}=\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x\langle0|a(k,\lambda):\bar{\psi}^{+}\gamma_\mu\psi^{+}A^{\mu-}:d^{\dagger}(q,\tau)c^{\dagger}(p,s)|0\rangle,\tag{4.87}$$

其中,$\psi^{+}(x)$的任务是消灭初态电子,$\bar{\psi}^{+}(x)$是消灭初态正电子,$A^{\mu-}(x)$是产生末态光子,这样(4.87)式可写成

$$S_{fi}^{(1)}=-\mathrm{i}e\int\mathrm{d}^4x[a(k,\lambda),A^{\mu-}(x)]\{\bar{\psi}^{+}(x),d^{\dagger}(q,\tau)\}\gamma_\mu\{\psi^{+}(x),c^{\dagger}(p,s)\},$$

“—”号是由于 ψ^{+} 与 $d^{\dagger}(q,\tau)$位置的交换引起的. 将场算符的正、负频解(4.83)代入上式得对易与反对易子

$$
\begin{aligned}
&[a(k,\lambda),\ A^{\mu-}(x)] \\
&= \left[a(k,\lambda),\ \sum_{k'\lambda'} \frac{e^{\mu}(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega}} \bar{a}(k',\lambda')\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x}\right] = \frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \\
&\{\bar{\psi}^{+}(x),\ d^{\dagger}(q,\tau)\} \\
&= \left\{\sum_{ps} \sqrt{\frac{m}{VE}} d(p,s)\bar{v}(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},\ d^{\dagger}(q,\tau)\right\} = \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, \bar{v}(q,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}, \\
&\{\psi^{+}(x),\ c^{\dagger}(p,s)\} \\
&= \left\{\sum_{p's'} \sqrt{\frac{m}{VE}} c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x},\ c^{\dagger}(p,s)\right\} = \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},
\end{aligned}
$$

则 S 矩阵元

$$
S_{fi}^{(1)} = -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4 x \frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, \bar{v}(q,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x}\gamma_{\mu} \sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x},
$$

完成对 x 的积分得

$$
S_{fi}^{(1)} = \frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}} \sqrt{\frac{m}{VE_q}}\, \bar{v}(q,\tau)(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})(2\pi)^4\delta^4(p+q-k)\sqrt{\frac{m}{VE_p}} u(p,s). \tag{4.88}
$$

这就是与费曼图 4.1 所对应的 S 矩阵元,其中的 δ 函数确保了该过程的能量-动量守恒,即初始时刻的总动量 $p_i = p + q$ 等于末时刻的总动量 $p_f = k$. 其余各矩阵因子与费曼图各组成部分的对应关系由如下费曼规则给出.

费曼规则Ⅰ　正反费米子、光子的外线及顶角的费曼图与矩阵因子有对应关系

p　$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{VE}}\bar{u}(p,s)$ (费米子产生) 或 $\sqrt{\frac{m}{VE}}\bar{v}(p,s)$ (反费米子消灭),

p　$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{VE}}\bar{u}(p,s)$ (费米子消灭) 或 $\sqrt{\frac{m}{VE}}\bar{v}(p,s)$ (反费米子产生),

$e_{\mu}(k,\lambda)$　$\Rightarrow \frac{e_{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$ (光子产生或消灭),

μ　$\Rightarrow -\mathrm{i}e\gamma_{\mu}$ (顶角因子),

且按费曼图根据上述对应关系写下 S 矩阵元时,应逆着费米子线的箭头方向进行. 玻色子的矩阵因子,由于是 C 数而不是矩阵,它的位置是任意的. 写出的 S 矩阵元中还要加上反映整个过程能量-动量守恒的 δ 函数 $(2\pi)^4\delta^4(p_i - p_f)$,其中 p_i 与 p_f 分别是反应过程前后的总动量.

显然，按照上述规则，由费曼图 4.1 可以很方便地写出 S 矩阵元(4.88)式，而无需中间那些繁琐的计算过程.这也正是费曼图与费曼规则的用途所在.对于任意一个物理过程，只要画出其费曼图，则与该过程相应的 S 矩阵元可由费曼规则直接写出，而不再需要具体的计算过程，从而简化了 S 矩阵元的求解问题.

由费曼规则Ⅰ知：从顶点射出的费米子线，其旋量波函数都带有杠号"－"，反之进入顶点的费米子线，其旋量波函数都不带杠号"－".另外，u 与 $\bar{u}$ 都是费米子的旋量波函数，v 与 $\bar{v}$ 都是反费米子的旋量波函数.据此，人们有口诀：正 u 反 v，顶点射出箭头，加个杠号"－".该口诀虽然一点儿也不押韵，但它对于帮助我们记住何时用 u 何时用 v，何时加杠何时不加杠，还是挺管用的.

需要一提的是，如上所述，(4.88)式中的 δ 函数要求：电子动量 p、正电子动量 q 与光子动量 k 满足方程

$$p+q=k, \tag{4.89}$$

而过程(4.84)中的电子、正电子与光子都是实粒子，都要满足相对论的质壳关系

$$p^2=m^2,\quad q^2=m^2,\quad k^2=0, \tag{4.90}$$

(4.90)与(4.89)式显然是矛盾的.所以，电子对湮灭为单个光子的过程实际上是不可能发生的，这里只是为了导出费曼规则而人为地引入该过程.

4.4.2　穆勒散射与费曼规则Ⅱ

穆勒(Mϕller)散射是指一个动量为 p、自旋为 s 的电子和一个动量为 q、自旋为 τ 的电子，碰撞后成为一个动量为 p'、自旋为 s' 的电子和一个动量为 q'、自旋为 τ' 的电子，其过程为

$$e^-(p,s)+e^-(q,\tau)\rightarrow e^-(p',s')+e^-(q',\tau'), \tag{4.91}$$

其初态和末态分别为

$$|i\rangle=c^\dagger(p,s)c^\dagger(q,\tau)|0\rangle,\quad |f\rangle=c^\dagger(p',s')c^\dagger(q',\tau')|0\rangle, \tag{4.92}$$

该过程是电磁作用，相互作用的哈密顿密度为

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).$$

与该过程有关的 S 矩阵是那些能够消灭初态电子对、产生末态电子对的项，如

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2!}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 : \bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2^+ \underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}_{} :,\\
S^{(4)} &= \frac{(-\mathrm{i}e)^4}{4!}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4\\
&\quad\times : \bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu \underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}_{}\gamma_\lambda \underbrace{\psi_3\bar{\psi}_4}_{}\gamma_\rho\psi_4^+ \underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}_{} \underbrace{A_3^\lambda A_4^\rho}_{} :+\cdots,\\
&\cdots,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

亦有无穷多项.取最低级近似，S 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s')c(q',\tau')$$
$$\times:\bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)c^\dagger(q,\tau)|0\rangle,\tag{4.94}$$

其中,ψ_1^+ 和 ψ_2^+ 的任务是消灭初态电子,有两种方式:ψ_1^+ 消灭第一个电子,ψ_2^+ 消灭第二个电子,或者是 ψ_1^+ 消灭第二个电子,ψ_2^+ 消灭第一个电子. $\bar{\psi}_1^-$ 与 $\bar{\psi}_2^-$ 的任务是产生末态电子,也有两种方式:$\bar{\psi}_1^-$ 产生第三个电子,$\bar{\psi}_2^-$ 产生第四个电子,或者 $\bar{\psi}_1^-$ 产生第四个电子,$\bar{\psi}_2^-$ 产生第三个电子. 所以,共有四种消灭、产生电子的组合形式,(4.94)式就成为四项之和,如表 4.1 所示.

表 4.1　ψ_1^+、ψ_2^+、$\bar{\psi}_1^-$ 与 $\bar{\psi}_2^-$ 消灭、产生电子的 4 种不同组合

$\psi^+(x_1)$	$\psi^+(x_2)$	$\bar{\psi}^-(x_1)$	$\bar{\psi}^-(x_2)$
1	2	3	4
2	1	4	3
1	2	4	3
2	1	3	4

由该表可以看出:若作代换 $x_1\rightleftharpoons x_2$,则表中第 1 行与第 2 行相同,第 3 行与第 4 行相同,而 x_1 与 x_2 都是积分变量,故 x_1 与 x_2 的交换是允许的,因此 S 矩阵元(4.94)式只有独立的两项,消去因子 $\frac{1}{2}$,S 矩阵元为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}=e^2\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\,&\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu}(x_2)\\ &\times[\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x_1)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x_1),c^\dagger(p,s)\}\\ &\times\{c(q',\tau'),\bar{\psi}^-(x_2)\}\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^\dagger(q,\tau)\}\\ &-\{c(q',\tau'),\bar{\psi}^-(x_1)\}\gamma_\mu\{\psi^+(x_1),c^\dagger(p,s)\}\\ &\times\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x_2)\}\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^\dagger(q,\tau)\}].\end{aligned}$$

将场量的正、负频解(4.83)代入上式的反对易子得

$$\begin{aligned}&\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x_1)\}\\ &=\left\{c(p',s'),\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE_p}}c^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\right\}=\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\,\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_1},\\ &\{c(q',\tau'),\bar{\psi}^-(x_2)\}\\ &=\left\{c(q',\tau'),\sum_{\boldsymbol{p}s}\sqrt{\frac{m}{VE_p}}c^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_2}\right\}=\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\,\bar{u}(q',\tau')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\cdot x_2},\\ &\{\psi^+(x_1),c^\dagger(p,s)\}\\ &=\left\{\sum_{\boldsymbol{p}'s'}\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_1},c^\dagger(p,s)\right\}=\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1},\end{aligned}$$

$$\{\psi^{+}(x_2), c^{\dagger}(q,\tau)\}$$
$$=\left\{\sum_{p's'}\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_2}, c^{\dagger}(q,\tau)\right\}=\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x_2}.$$

而电磁场的收缩是如(3.210)式所示的光子传播子,即

$$\underbrace{A^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)}=\langle 0|TA^{\mu}(x_1)A^{\nu}(x_2)|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}.$$

将它们代入 $S_{fi}^{(2)}$ 得

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}=e^2\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}\\
\times\Big[\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_1}\gamma_{\mu}\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}\\
\times\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\cdot x_2}\gamma_{\nu}\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x_2}\\
-\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')\mathrm{e}^{\mathrm{i}q'\cdot x_1}\gamma_{\mu}\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_1}\\
\times\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_2}\gamma_{\nu}\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot x_2}\Big].\end{aligned}$$

完成对 x_1、x_2 的积分,得

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\\
\times\Big[\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})(2\pi)^4\delta^4(q'-k-p)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\\
\times\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_{\nu})(2\pi)^4\delta^4(k+p'-q)\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\\
-\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})(2\pi)^4\delta^4(p'-k-p)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\\
\times\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')(-\mathrm{i}e\gamma_{\nu})(2\pi)^4\delta^4(k+q'-q)\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\Big].\end{aligned}\tag{4.95a}$$

其中的 δ 函数,是保证由两费米子线与一光子线所组成的顶角的能量-动量守恒所需.再完成对光子传播子动量 k 的积分得

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}=(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\\
\times\Big[\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\\
\times\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{(q'-p)^2}\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_{\nu})\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\\
-\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\end{aligned}$$

$$\times \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{(p'-p)^2}\sqrt{\frac{m}{VE_{q'}}}\bar{u}(q',\tau')(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE_q}}u(q,\tau)\Big]. \tag{4.95b}$$

这时，积分掉一个顶角上的 δ 函数，还剩下一个 δ 函数，其作用是保证整个过程的能量-动量守恒. 其余各矩阵因子，除光子传播子外，与费曼图的对应关系已由费曼规则Ⅰ给出. 光子传播子通常用图形 •∿∿∿• 表示，亦称为光子内线，意指两端都与顶点相连的线段. 这样，由费曼规则Ⅰ，就可以得到与(4.95b)式相应的费曼图，如图 4.2 所示.

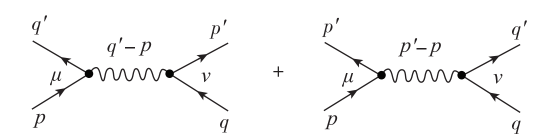


图 4.2　穆勒散射过程的费曼图

图 4.2 中第二个图形与第一个图形的差别，仅仅是产生的两个费米子的位置的交换，这正是(4.95b)式中括号内两项差一负号的原因. 由此，又得如下费曼规则.

费曼规则Ⅱ　光子传播子的费曼图与矩阵因子为

$$\mu \ \overset{k}{\bullet\!\sim\!\sim\!\sim\!\bullet}\ \nu \quad \Rightarrow \frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}(\text{光子传播子}).$$

两个费曼图，若其差异仅在于交换费米子线的位置，二者所对应的 S 矩阵元将仅差一负号.

4.4.3　电子自能与费曼规则Ⅲ

由于电磁作用，电子会不断发射并随即吸收光子，这种过程叫做电子自能过程，即

$$e^-(p,s) \to e^-(p',s'), \tag{4.96}$$

初态与末态都只有一个电子，即

$$|i\rangle = c^\dagger(p,s)|0\rangle, \quad |f\rangle = c^\dagger(p',s')|0\rangle. \tag{4.97}$$

制约该过程的哈密顿密度仍然是

$$\mathscr{H}_i(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).$$

S 矩阵中与该过程有关的项为

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\Big(\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 : \bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}: + \int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2 : \underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:\Big),\\
S^{(4)} &= \frac{(-\mathrm{i}e)^4}{4!}\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4 : \bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}\gamma_\lambda\underbrace{\psi_3\bar{\psi}_4}\gamma_\rho\psi_4^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}\underbrace{A_3^\lambda A_4^\rho}: + \cdots,\\
&\cdots.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

取最低级近似 $S^{(2)}$，其矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\Big[\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle$$

$$+\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle\Big].$$

对于第二项

$$\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\underbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1^+\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\psi_2}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle$$

$$=\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\underbrace{\bar{\psi}_{1\alpha}\gamma_\mu^{\alpha\beta}\psi_{1\beta}^+\bar{\psi}_{2\lambda}^-\gamma_\nu^{\lambda\delta}\psi_{2\delta}}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle$$

$$=\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\bar{\psi}_{2\lambda}^-\gamma_\nu^{\lambda\delta}\underbrace{\psi_{2\delta}\bar{\psi}_{1\alpha}}\gamma_\mu^{\alpha\beta}\psi_{1\beta}^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle$$

$$=\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_1}\gamma_\mu\psi_1^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle.$$

则

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\Big[\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\bar{\psi}_1^-\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle$$

$$+\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\langle 0|c(p',s'):\bar{\psi}_2^-\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_1}\gamma_\mu\psi_1^+\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}:c^\dagger(p,s)|0\rangle\Big].$$

在第二项中，若作交换 $x_1\rightleftharpoons x_2$，$\mu\rightleftharpoons\nu$，则第二项与第一项相等，由于 x_1、x_2 都是积分变量，μ、ν 都是收缩指标，所以这种交换是允许的，这样

$$S_{fi}^{(2)}=(-\mathrm{i}e)^2\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x_1)\}$$

$$\times\gamma_\mu\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}\gamma_\nu\{\psi^+(x_2),c^\dagger(p,s)\}\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}.$$

如前所述

$$\{c(p',s'),\bar{\psi}^-(x_1)\}$$

$$=\Big\{c(p',s'),\sum_{ps}\sqrt{\frac{m}{VE_p}}c^\dagger(p,s)\bar{u}(p,s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x_1}\Big\}=\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_1},$$

$$\{\psi^+(x_2),c^\dagger(p,s)\}$$

$$=\Big\{\sum_{p's'}\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}c(p',s')u(p',s')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p'\cdot x_2},c^\dagger(p,s)\Big\}=\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_2},$$

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)}=\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot q-m+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x_1-x_2)},$$

$$\underbrace{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)}=\langle 0|TA^\mu(x_1)A^\nu(x_2)|0\rangle=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}.$$

代入 $S_{fi}^{(2)}$ 得

$$S_{fi}^{(2)}=(-\mathrm{i}e)^2\int \mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x_1}\gamma_\mu$$

$$\times\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot q-m+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q\cdot(x_1-x_2)}\gamma_\nu\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x_2}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x_1-x_2)}.$$

完成对时空坐标 x_1 与 x_2 的积分得

$$S_{fi}^{(2)}=\int\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)(2\pi)^4\delta^4(p'-q-k)$$

$$\times\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot q-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)(2\pi)^4\delta^4(q+k-p)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s),\tag{4.99a}$$

其中的 δ 函数保证了作用顶角的能量-动量守恒，两个四维动量积分分别来自于费米子与光子传播子. 再完成对费米子传播子动量 q 的积分，消去一个顶角 δ 函数，剩下一个保证整个过程能量-动量守恒的 δ 函数，得

$$S_{fi}^{(2)}=(2\pi)^4\delta^4(p-p')\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\varepsilon}$$

$$\times\sqrt{\frac{m}{VE_{p'}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m}{VE_p}}u(p,s).\tag{4.99b}$$

还剩下一个对 k 的积分不能消去. 在(4.99b)式中，除了费米子传播子外，其他各矩阵因子的费曼图已由费曼规则Ⅰ、Ⅱ给出. 费米子传播子用图形 •—→—• 表示，亦称为费米子内线，则由费曼规则Ⅰ、Ⅱ，可得与过程(4.99b)相应的费曼图，如图 4.3 所示.

k
ν　μ
p　p−k　p′

图 4.3　电子自能的费曼图

为了能由图 4.3 反过来得到矩阵元(4.99b)式，还需如下费曼规则.

费曼规则Ⅲ　费米子传播子的费曼图与矩阵因子为

$$\overset{p}{\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet}\quad\Rightarrow\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}\text{(费米子传播子)},$$

且对于闭合回路，还要加一个对回路的动量积分.

4.4.4　真空极化与费曼规则Ⅳ

按照狄拉克的真空理论，真空是指负能态中的空穴都被电子填满、而正能态全都空着的状态. 当存在电磁场时，空穴和负能电子将发生相对移动，类似于经典电磁场中电介质的极化，这种情况叫做真空极化. 从电磁作用的量子理论来看，真空极化是指光子不断变成正负电子对，正负电子对又随即湮灭成光子的过程，所以真空极化又叫光子自能，其过程为

$$\gamma(k,\lambda)\rightarrow\gamma(k',\lambda'),\tag{4.100}$$

初态、末态都只有一个光子

$$|i\rangle=\bar{a}(k,\lambda)|0\rangle,\quad |f\rangle=\bar{a}(k',\lambda')|0\rangle,\tag{4.101}$$

制约该过程的哈密顿密度是

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

而与该过程有关的 S 矩阵为

$$S^{(2)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2:\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}(A_1^{\mu-}A_2^{\nu+}+A_2^{\nu-}A_1^{\mu+}):,$$

$$S^{(4)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^4}{4!}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2\mathrm{d}^4x_3\mathrm{d}^4x_4:\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_3}\gamma_\lambda\underbrace{\psi_3\bar{\psi}_4}\gamma_\rho\psi_4}\underbrace{A_1^\mu A_2^\nu}A_3^{\lambda-}A_4^{\rho+}:+\cdots,$$

$$\cdots.\tag{4.102}$$

有无穷多项.考虑到最低级项,S 矩阵元为

$$S_{fi}^{(2)}=\frac{(-\mathrm{i}e)^2}{2}\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2$$

$$\times\langle 0|a(k',\lambda'):\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}(A_1^{\mu-}A_2^{\nu+}+A_2^{\nu-}A_1^{\mu+}):\bar{a}(k,\lambda)|0\rangle,\tag{4.103}$$

其中,$A_2^{\nu+}$ 或 $A_1^{\mu+}$ 的任务是消灭初态光子,$A_1^{\mu-}$ 或 $A_2^{\nu-}$ 的任务是产生末态光子,注意到

$$\begin{aligned}\overbrace{\bar{\psi}_1\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu\psi_2}&=\overbrace{\bar{\psi}_{1\alpha}\gamma_\mu^{\alpha\beta}\underbrace{\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\lambda}}\gamma_\nu^{\lambda\delta}\psi_{2\delta}}\\&=-\underbrace{\psi_{2\delta}\bar{\psi}_{1\alpha}}\gamma_\mu^{\alpha\beta}\underbrace{\psi_{1\beta}\bar{\psi}_{2\lambda}}\gamma_\nu^{\lambda\delta}\\&=-\mathrm{Tr}\,\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_1}\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu.\end{aligned}$$

这样,在(4.103)式中,若作交换 $x_1\rightleftharpoons x_2$,$\mu\rightleftharpoons\nu$,第一项与第二项相等,因此有

$$S_{fi}^{(2)}=(-\mathrm{i}e)^2\int\mathrm{d}^4x_1\mathrm{d}^4x_2$$

$$\times\langle 0|a(k',\lambda'):(-\mathrm{Tr}\,\underbrace{\psi_2\bar{\psi}_1}\gamma_\mu\underbrace{\psi_1\bar{\psi}_2}\gamma_\nu)A_1^{\mu-}A_2^{\nu+}:\bar{a}(k,\lambda)|0\rangle.$$

另

$$\begin{aligned}&[a(k',\lambda'),\ A^{\mu-}(x_1)]\\&=\left[a(k',\lambda'),\ \sum_{k\lambda}\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\bar{a}(k,\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x_1}\right]=\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'\cdot x_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[A^{\nu+}(x_2),\bar{a}(k,\lambda)]\\&=\left[\sum_{k\lambda}\frac{e^\nu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}a(k',\lambda')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k'\cdot x_2},\ \bar{a}(k,\lambda)\right]=\frac{e^\nu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x_2},\end{aligned}$$

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)} = \langle 0 | T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m + i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x_1 - x_2)}.$$

代入上式得

$$S_{fi}^{(2)} = (-ie)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \frac{e^{\mu}(k', \lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} e^{ik'\cdot x_1}$$
$$\times (-\mathrm{Tr}) \left[\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot p - m} e^{-ip\cdot(x_2 - x_1)} \gamma_\mu \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{\gamma \cdot q - m} e^{-iq\cdot(x_1 - x_2)} \gamma_\nu \right]$$
$$\times \frac{e^{\nu}(k, \lambda)}{\sqrt{2V\omega}} e^{-ik\cdot x_2}.$$

对时空坐标 x_1、x_2 积分得

$$S_{fi}^{(2)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{\mu}(k', \lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} \frac{e^{\nu}(k, \lambda)}{\sqrt{2V\omega}} (-\mathrm{Tr}) \left[\frac{i}{\gamma \cdot p - m + i\varepsilon} \right.$$
$$\left. \times (-ie\gamma_\mu)(2\pi)^4 \delta^4(k' + p - q) \frac{i}{\gamma \cdot q - m + i\varepsilon} (-ie\gamma_\nu)(2\pi)^4 \delta^4(q - p - k) \right], \tag{4.104a}$$

与前面一样,其中的 δ 函数确保了作用顶角的能量-动量守恒,两个四维动量积分来自于两费米子传播子.再对其中的一个费米子内线动量,如 q 取积分,消去其中的一个 δ 函数得

$$S_{fi}^{(2)} = (2\pi)^4 \delta^4(k' - k) \frac{e^{\mu}(k', \lambda')}{\sqrt{2V\omega'}} \frac{e^{\nu}(k, \lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$$
$$\times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-\mathrm{Tr}) \left[\frac{i}{\gamma \cdot p - m} (-ie\gamma_\mu) \frac{i}{\gamma \cdot (p + k) - m} (-ie\gamma_\nu) \right]. \tag{4.104b}$$

与其相应的费曼图如图 4.4 所示.在由该费曼图写出矩阵元(4.104b)式时,除了用到前面提到的费曼规则Ⅰ、Ⅱ与Ⅲ外,还需要如下费曼规则.

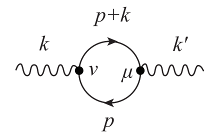


图 4.4　真空极化的费曼图

费曼规则Ⅳ　对于闭合费米子圈,除了需要对回路的动量积分外,还要加一个对回路的求迹运算(−Tr).

以上通过四个具体实例得到了四条费曼规则,这些规则给出了费曼图的构件:外线、内线、顶点及圈图等与矩阵因子之间的对应关系.由这些对应关系,就可以根据具体过程的费曼图,直接写出该过程的 S 矩阵元,该矩阵元是计算实验上可观察的物理量,如粒子的寿命与碰撞截面的基础.

4.5　粒子的寿命和碰撞截面

前几节，我们用了很大的篇幅讨论了 S 矩阵元的计算问题. 从相互作用表象的采用，到微扰展开，后到绝热假设，再到维克定理的引入，直到最后费曼规则的建立，这个问题才得到了根本的解决. 每一步对 S 矩阵元的求解都至关重要. 第一步使得 S 矩阵中的场量可采用自由场算符，从而避开了相互作用场方程无法精确求解的问题；第二步解决了 S 矩阵的求解问题，得到了它的近似解；第三步使得 S 矩阵元中的态矢可取成自由粒子态；第四步将 S 矩阵中场算符的编时乘积变成了正规乘积，去掉了与过程无关的多余项；最后一步将 S 矩阵元中的各组成部分与费曼图相联系，从而将 S 矩阵元繁难的计算问题变成了简单的按图写代数式的问题，大大地简化了问题的处理.

本节将建立起 S 矩阵元与实验可测量量之间的联系，讨论粒子的寿命与两粒子间的碰撞截面，给出它们的计算公式.

4.5.1　反应矩阵与反应矩阵元

按定义，S 矩阵的作用是将 $t\to-\infty$ 时的初态 $|i\rangle$，变成 $t\to\infty$ 时的末态 $|f'\rangle=S|i\rangle$，在 S 矩阵的微扰展开(4.54)中，$S^{(0)}=1$，不引起任何变化，引起状态变化的部分，实际上是

$$S=1+\mathrm{i}R$$

中的 R 部分，故通常将 R 称为反应矩阵，而称

$$R_{fi}=\langle f|R|i\rangle, \tag{4.105}$$

为反应矩阵元，是由初态 $|i\rangle$ 反应到末态 $|f\rangle$ 的几率幅.

反应矩阵元 R_{fi} 由外线、内线及顶角因子构成. 每一外线有一运动学因子 $1/\sqrt{2V\omega}$ 或 $\sqrt{m/VE}$，假设所讨论过程的初态有 n 个粒子，末态有 m 个粒子，令

$$N_i=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{2\omega_i}\left(\text{或}\sqrt{\frac{E_i}{m_i}}\right),\quad N_f=\prod_{f=1}^{m}\sqrt{2\omega_f}\left(\text{或}\sqrt{\frac{E_f}{m_f}}\right), \tag{4.106}$$

分别代表 n 个初态粒子的运动学因子和 m 个末态粒子的运动学因子. 将这些运动学因子分离出来得

$$R_{fi}=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)}{N_iN_fV^{\frac{(n+m)}{2}}}T_{fi}, \tag{4.107}$$

其中的 δ 函数保证了反应过程的能量-动量守恒，T_{fi} 是动力学部分，由顶角因子、传播子和外线的自旋、极化等部分组成. 由前面的讨论知，它是洛伦兹标量[参见(4.95)、(4.99)及(4.104)等式]，故称为不变振幅.

4.5.2　反应几率

反应矩阵元 R_{fi} 是由初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的几率幅，其绝对值的平方

$$|R_{fi}|^2=\frac{[(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)]^2}{N_i^2N_f^2V^{n+m}}|T_{fi}|^2 \tag{4.108}$$

就是过程的反应几率，过程经历的时间 $T\to\infty$. 这个几率就是在整个过程中的几率，所以有确定意义的应该是单位时间内的几率，用 P_{fi} 表示，则

$$P_{fi}=\frac{|R_{fi}|^2}{T}=\frac{[(2\pi)^4\delta^4(p_i-p_f)]^2}{TN_i^2N_f^2V^{n+m}}|T_{fi}|^2. \tag{4.109}$$

另外，一个 δ 函数是保证能量-动量守恒所必需的，而 δ 函数的平方就变得没有意义了，需对它进行处理.

由于

$$\begin{aligned}2\pi\delta(E_f-E_i)&=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E_f-E_i)t}\mathrm{d}t,\\(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)&=\lim_{V\to\infty}\int_V\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3x.\end{aligned} \tag{4.110}$$

这样，δ 函数的平方可表示为

$$[2\pi\delta(E_f-E_i)]^2=2\pi\delta(E_f-E_i)2\pi\delta(0)=2\pi\delta(E_f-E_i)T,$$

$$[(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)]^2=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)(2\pi)^3\delta^3(0)=(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{p}_f-\boldsymbol{p}_i)V.$$

所以

$$\begin{aligned}[(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)]^2&=(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)(2\pi)^4\delta^4(0)\\&=(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)TV.\end{aligned} \tag{4.111}$$

这样，单位时间内的几率

$$P_{fi}=\frac{|R_{fi}|^2}{T}=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2V^{n+m-1}}|T_{fi}|^2. \tag{4.112}$$

上式中，初、末态粒子的能量、动量、自旋和极化都是确定的. 而实验上给出的是处在一定自旋与极化状态下的粒子，反应生成具有不同自旋与极化的末态粒子的几率. 所以，为了与实验结果相比较，需要在(4.112)式中对初态粒子的自旋、极化求平均，对末态粒子的自旋、极化求和，我们用 $\bar{\sum}$ 来表示这种运算，上式变为

$$P_{fi}=\frac{\bar{\sum}|R_{fi}|^2}{T}=\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2V^{n+m-1}}\bar{\sum}|T_{fi}|^2. \tag{4.113}$$

另外，在实验上，初态粒子的能量、动量取确定的值，而末态粒子的能量、动量可取各种可能的值，为了与实验结果相比较，还需对末态粒子的动量求和，这样(4.113)式

变为

$$P_{fi}=\sum_{\boldsymbol{p}_f}\frac{\bar{\sum}|R_{fi}|^2}{T}=\sum_{\boldsymbol{p}_f}\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2V^{n+m-1}}\bar{\sum}|T_{fi}|^2. \tag{4.114}$$

在连续情况下,求和变为积分

$$\sum_{\boldsymbol{p}_f}\Rightarrow\int\prod_f\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3},$$

(4.114)式变为

$$P_{fi}=\int\frac{\bar{\sum}|R_{fi}|^2}{T}\prod_f\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2V^{n-1}}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}. \tag{4.115}$$

(4.115)式即为实验上观察到的单位时间内由初态 $|i\rangle$ 到末态 $|f\rangle$ 的反应几率.

4.5.3 粒子的寿命

实验上已发现的粒子绝大部分都是不稳定的,即粒子产生后经过一段时间将自发地衰变为其他粒子,从产生到衰变前粒子存在的时间就是粒子的寿命.一个粒子可以有不同的衰变过程或衰变道,每种衰变道所经历的时间或寿命是不同的,所占的比例或分支比也不一样,通常所说的粒子的寿命,指的是各种衰变道所经历的时间的加权平均值(权重因子为分支比),或等于大量同种粒子寿命的算术平均值.对于大量粒子,粒子的寿命就是粒子数目减少至初始时刻数目的 $1/e$ 倍时的特征时间.需要强调一点的是,粒子的寿命指的都是其静止时的寿命,每种不稳定粒子的寿命都是唯一确定的.

对于某一衰变过程,粒子的寿命显然应与该过程的反应几率成反比,通常称该反应几率为衰变宽度,用 Γ 表示,在量值上等于粒子在单位时间内衰变掉的几率,其倒数就是粒子从产生到衰变为其他粒子时所经历的时间,这正是粒子相对于该过程的寿命,用 τ 表示.这样,在(4.115)式中,取 $n=1$ 得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau_{i\to f}}=\Gamma_{i\to f}=P_{fi}&=\int\frac{\bar{\sum}|R_{fi}|^2}{T}\prod_f\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}\\&=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{4.116a}$$

由上式,只要知道了状态 $|i\rangle$ 或粒子 i 的末态衰变粒子,就可求得该粒子对该衰变道的寿命或衰变宽度,而粒子 i 的寿命就是所有衰变道寿命的加权平均,即

$$\tau_i=\frac{1}{\Gamma_i}=\frac{\sum_{f=1}^{n}\tau_{i\to f}B_{i\to f}}{n},\quad\sum_f^nB_{i\to f}=1,\ \Gamma_{i\to f}=\Gamma_iB_{i\to f}, \tag{4.116b}$$

其中,$B_{i\to f}$ 是由 $i\to f$ 衰变道的分支比,可由实验测得,n 为粒子 i 所有衰变道的总和,

Γ_i 为粒子 i 总的衰变宽度.

4.5.4　碰撞截面

高能粒子碰撞是研究粒子的基本性质、寻找新物质与新物理最常用、最重要的手段之一.实验上进行碰撞的是粒子束,束流的强度常用束流密度来描述,定义为

$$J=\rho|\boldsymbol{v}_r|, \tag{4.117}$$

其中,ρ 是入射的粒子数密度,在归一化体积 V 中,只有一个粒子,所以

$$\rho=\frac{1}{V}, \tag{4.118}$$

$|\boldsymbol{v}_r|$ 是两个粒子的相对速率.在相对论理论中,运动粒子的

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v},\quad E=m,$$

所以

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{p}}{E}.$$

在实验室坐标系中,靶粒子不动,相对速度就是入射粒子的速度,即

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\boldsymbol{p}}{E}. \tag{4.119}$$

E、$\boldsymbol{p}$ 是入射粒子的能量和动量.在一般情况下,相对速度

$$\boldsymbol{v}_r=\frac{\boldsymbol{p}}{E}-\frac{\boldsymbol{p}'}{E'}, \tag{4.120}$$

或

$$|\boldsymbol{v}_r|=\frac{\sqrt{(p\cdot p')^2-p^2p'^2}}{EE'}, \tag{4.121}$$

其中,$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$分别为入射与靶粒子的动量,E 与 E'为相应的能量.在质心系中,$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}'$,这时

$$\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{p}\left(\frac{1}{E}+\frac{1}{E'}\right). \tag{4.122}$$

实验表明,单位时间内两粒子的碰撞几率与粒子束流密度成正比,即

$$P_{fi}|_{n=2}=\sigma J, \tag{4.123}$$

其中,σ 为比例系数.由于 P_{fi} 的量纲为$[P_{fi}]=[\mathrm{GeV}]$,$[J]=[\mathrm{GeV}^3]$,所以$[\sigma]=[\mathrm{GeV}^{-2}]$,即 σ 具有面积的量纲,通常称为碰撞截面.注意到碰撞初态有两个粒子,由(4.115)式取 $n=2$ 得

$$\sigma=\int\frac{\bar{\sum}|R_{fi}|^2}{TJ}\prod_f\frac{V\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2JV}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}. \tag{4.124}$$

由其定义知,σ 与过程发生的几率成正比,且在几何上与两粒子的相对运动方向相垂

直,所以 σ 是洛伦兹不变的.

例 4.4 证明在质心系中,$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}'$.

证明 这一关系在力学中早有证明,由于在质心系中讨论问题经常用到该关系,这里对其作一简单的证明,以免再去翻阅其他书籍.

假设两粒子的质量分别为 m 与 m',在时刻 t,两者在实验室中的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_m$ 与 $\boldsymbol{r}_{m'}$,则二者质心处的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_c=\frac{m\boldsymbol{r}_m+m'\boldsymbol{r}_{m'}}{m+m'},$$

质心的运动速度为

$$\boldsymbol{v}_c=\frac{m\boldsymbol{v}_m+m'\boldsymbol{v}_{m'}}{m+m'},$$

其中,$\boldsymbol{v}_m=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_m/\mathrm{d}t$,$\boldsymbol{v}_{m'}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{m'}/\mathrm{d}t$ 分别为两粒子在实验室中的运动速度,则粒子 m 相对于质心的速度与动量为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_c=\frac{m'(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_{m'})}{m+m'},\quad \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=\frac{mm'(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_{m'})}{m+m'},$$

粒子 m' 相对于质心的速度与动量为

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}_{m'}-\boldsymbol{v}_c=-\frac{m(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_{m'})}{m+m'},\quad \boldsymbol{p}'=m'\boldsymbol{v}'=-\frac{mm'(\boldsymbol{v}_m-\boldsymbol{v}_{m'})}{m+m'},$$

所以 $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{p}'$,证毕.

例 4.5 证明(4.121)式.

证明 (4.120)式两边取平方得

$$|\boldsymbol{v}_r|^2=\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{E^2}+\frac{|\boldsymbol{p}'|^2}{E'^2}-\frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{EE'},$$

亦即

$$|\boldsymbol{v}_r|=\frac{(E'^2\ |\boldsymbol{p}|^2+E^2\ |\boldsymbol{p}'|^2-2EE'\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^{\frac{1}{2}}}{EE'}. \tag{4.125}$$

而由(4.121)式知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}_r|&=\frac{\sqrt{(p\cdot p')^2-p^2p'^2}}{EE'}=\frac{[(EE'-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2-(E^2-|\boldsymbol{p}|^2)(E'^2-|\boldsymbol{p}'|^2)]^{\frac{1}{2}}}{EE'}\\&=\frac{[E^2E'^2-2EE'\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2-E^2E'^2+E^2\ |\boldsymbol{p}'|^2+E'^2\ |\boldsymbol{p}|^2-|\boldsymbol{p}|^2\ |\boldsymbol{p}'|^2]^{\frac{1}{2}}}{EE'}\\&=\frac{[E'^2\ |\boldsymbol{p}|^2+E^2\ |\boldsymbol{p}'|^2-2EE'\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2-|\boldsymbol{p}|^2\ |\boldsymbol{p}'|^2]^{\frac{1}{2}}}{EE'},\end{aligned}$$

对于两碰撞粒子，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 共线反向，故 $(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2=|\boldsymbol{p}|^2\ |\boldsymbol{p}'|^2$，所以

$$|\boldsymbol{v}_r|=\frac{(E'^2\ |\boldsymbol{p}|^2+E^2|\boldsymbol{p}'|^2-2EE'\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^{\frac{1}{2}}}{EE'},\Rightarrow \text{与(4.125)式一致，证毕.}$$

4.6　PCT 定理及 PCT 联合变换的应用

在 3.8 节中，在假设各种自由场的拉格朗日密度在 PCT 各分立变换下保持不变的情况下，得到了各场在不同变换下的变换形式.

在空间反射变换下，由(3.153)式知，各场算符作变换

$$\begin{aligned}&\mathscr{P}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\phi(-\boldsymbol{x},t),\\&\mathscr{P}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\gamma_0\psi(-\boldsymbol{x},t),\quad \mathscr{P}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=\pm\bar{\psi}(-\boldsymbol{x},t)\gamma_0,\\&\mathscr{P}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=-\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{x},t),\quad \mathscr{P}A_0(\boldsymbol{x},t)\mathscr{P}^{-1}=A_0(-\boldsymbol{x},t).\end{aligned}\tag{4.126}$$

由(3.155)、(3.158)及(3.161)式知，各场粒子的态矢作变换

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{P}a^\dagger(k)|0\rangle=\pm a^\dagger(-\boldsymbol{k})|0\rangle,\\&\mathscr{P}b^\dagger(k)|0\rangle=\pm b^\dagger(-\boldsymbol{k})|0\rangle\end{aligned}\right.\quad(\text{标量场}),\tag{4.127a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{P}c^\dagger(p,s)|0\rangle=\pm c^\dagger(-\boldsymbol{p},s)|0\rangle,\\&\mathscr{P}d^\dagger(p,s)|0\rangle=\mp d^\dagger(-\boldsymbol{p},s)|0\rangle\end{aligned}\right.\quad(\text{狄拉克场}),\tag{4.127b}$$

$$\mathscr{P}a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle=(-1)^{\lambda+1}a^\dagger(-\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle\quad(\text{光子场}).\tag{4.127c}$$

可见，在空间反射变换下，各场粒子的动量方向变号，正反标量粒子的宇称相同，正反狄拉克粒子的宇称相反，光子的宇称取决于其极化状态.

在电荷共轭变换下，由(3.165)与(3.166)式知，各场算符作变换

$$\begin{aligned}&\mathscr{C}\phi(x)\mathscr{C}^{-1}=\phi^*(x),\ \mathscr{C}\phi^*(x)\mathscr{C}^{-1}=\phi(x),\\&\mathscr{C}\psi(x)\mathscr{C}^{-1}=C\tilde{\bar{\psi}},\ \mathscr{C}\bar{\psi}(x)\mathscr{C}^{-1}=-\tilde{\psi}(x)C^{-1},\ C=i\gamma^0\gamma^2,\\&\mathscr{C}A_\mu(x)\mathscr{C}^{-1}=-A_\mu(x).\end{aligned}\tag{4.128}$$

由(3.168)、(3.172)与(3.175)式知，各场粒子的态矢作变换

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{C}a^\dagger(k)|0\rangle=b^\dagger(k)|0\rangle,\\&\mathscr{C}b^\dagger(k)|0\rangle=a^\dagger(k)|0\rangle\end{aligned}\right.\quad(\text{标量场}),\tag{4.129a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{C}c^\dagger(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}+1}d^\dagger(p,\bar{s})|0\rangle,\\&\mathscr{C}d^\dagger(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}c^\dagger(p,\bar{s})|0\rangle\end{aligned}\right.\quad(\text{狄拉克场}),\tag{4.129b}$$

$$\mathscr{C}a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle=-a^\dagger(k,\lambda)|0\rangle\quad(\text{光子场}).\tag{4.129c}$$

表明在电荷共轭变换下，正反粒子互换，狄拉克粒子的自旋取向反转. 光子的电荷宇称为负.

在时间反演变换下,由(3.176)与(3.178)式知,各场算符作变换

$$\begin{aligned}&\mathscr{T}\phi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\phi(\boldsymbol{x},-t),\\&\mathscr{T}\psi(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=T\psi(\boldsymbol{x},-t),\quad\mathscr{T}\bar{\psi}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=\bar{\psi}(\boldsymbol{x},-t)T^{-1},\quad T=\gamma^1\gamma^3,\\&\mathscr{T}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},-t),\quad\mathscr{T}A_0(\boldsymbol{x},t)\mathscr{T}^{-1}=A_0(\boldsymbol{x},-t).\end{aligned}\tag{4.130}$$

由(3.180)、(3.184)与(3.187)式知,各场粒子的态矢作变换

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{U}a^+(k)|0\rangle=a^+(-\boldsymbol{k})|0\rangle,\\&\mathscr{U}b^+(k)|0\rangle=b^+(-\boldsymbol{k})|0\rangle\end{aligned}\right\}\quad(\text{标量场}),\tag{4.131a}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{U}c^+(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}c^+(-\boldsymbol{p},\bar{s})|0\rangle,\\&\mathscr{U}d^+(p,s)|0\rangle=(-1)^{\bar{s}}d^+(-\boldsymbol{p},\bar{s})|0\rangle\end{aligned}\right\}\quad(\text{狄拉克场}),\tag{4.131b}$$

$$\mathscr{U}a^+(k,\lambda)|0\rangle=(-1)^{\lambda+1}a^+(-\boldsymbol{k},\lambda)|0\rangle\quad(\text{光子场}),\tag{4.131c}$$

表明在时间反演变换下,各粒子动量方向变号,狄拉克粒子的自旋反转.

显然,在 PCT 的联合变换下,各自由场的拉格朗日密度也不变.由于 PCT 变换表示的对称性不是严格的,所以在一般情况下,如有多种场相互作用时,其相互作用的拉格朗日密度对于 PCT 的各独立变换就不一定是不变的.那么,对于 PCT 的联合变换,情况又将如何呢?在已得变换结果(4.126)~(4.131)式的基础上,结合前面讨论过的电磁作用的量子理论,就可以对该问题做进一步地讨论.

4.6.1 *PCT* 定理

可以证明,若所讨论的场是定域的,即场粒子是点粒子,且满足自旋统计关系,即自旋为整数的粒子满足玻色-爱因斯坦统计,自旋为半奇整数的粒子满足费米-狄拉克统计,则对于任意满足洛伦兹不变的相互作用的拉格朗日密度,在 PCT 的联合变换下一定是不变的,这就是 PCT 定理.

由 PCT 定理可得如下两方面信息,一是 PCT 定理不限于特殊的作用形式,对于任何作用,无论是强的、弱的,还是电磁作用,只要满足所需条件,PCT 定理都成立.二是在 PCT 的三种分立变换中,只要有两种变换是不变的,另一种一定是不变的.反之,若两种变换的不变性是破坏的,另一种变换的不变性也一定是破坏的.

泡利与施温格(Schwinger)等曾对 PCT 定理给出过一般性的证明,这里将以洛伦兹规范下旋量场的电磁作用为例来对该定理予以证明.

由(4.19)式知,洛伦兹规范下旋量场电磁作用的拉格朗日密度为

$$\mathscr{L}_i=e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,\tag{4.132a}$$

上式是洛伦兹标量,满足洛伦兹不变的要求.另由3.4~3.6节的讨论知,狄拉克场算符的正则变量采用的是反对易关系,光子场算符为对易关系,所以两者满足正确的自旋统计关系.采用(2.140)式的守恒流,即 $j^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$,上式可变写成

$$\mathscr{L}_i=ej^\mu A_\mu.\tag{4.132b}$$

对于旋量场,守恒流 j^μ 是一种如(1.94b)式所示的电磁流,即

$$j^\mu=(\rho,\boldsymbol{j})=(\bar{\psi}\gamma_0\psi,\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)\text{，或 } j_\mu=(\rho,-\boldsymbol{j})=(\bar{\psi}\gamma_0\psi,-\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)\text{，}\tag{4.133}$$

只不过由于量子化,现在它是算符,与四维势算符 A^μ 之间有关系(1.102a)式,即

$$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu=j^\mu.\tag{4.134}$$

设算符 $\mathscr{O}=\mathscr{P}\mathscr{C}\mathscr{T}$,即 $\mathscr{O}$ 是 $\mathscr{P}$、$\mathscr{C}$、$\mathscr{T}$三算符的乘积,代表 PCT 的联合变换,则由(4.126)、(4.128)与(4.130)三式知

$$\mathscr{O}A^\mu(x)\mathscr{O}^{-1}=-A^\mu(-x),\tag{4.135}$$

再由(4.134)式得

$$\mathscr{O}j^\mu(x)\mathscr{O}^{-1}=-j^\mu(-x).\tag{4.136}$$

注意到(4.132b)式中的 e 是一个常数,以上两式表明

$$\mathscr{O}\mathscr{L}_i(x)\mathscr{O}^{-1}=\mathscr{L}_i(-x).\tag{4.137}$$

即在 PCT 的联合变换下,相互作用的拉格朗日密度除了变数变号外,其形式不变.

另由(4.20a)式知,洛伦兹规范下电磁作用的哈密顿密度为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}&=\pi^\mu\dot{A}_\mu+\mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi}-\mathscr{L}\\&=-\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu+\mathrm{i}\psi^\dagger\dot{\psi}-\mathscr{L}_0-\mathscr{L}_i,\end{aligned}\tag{4.138a}$$

其中

$$\mathscr{L}_0=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi-\frac{1}{2}\dot{A}_\nu\dot{A}^\nu+\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}A_\nu\cdot\boldsymbol{\nabla}A^\nu\text{，}\mathscr{O}\mathscr{L}_0(x)\mathscr{O}^{-1}=\mathscr{L}_0(-x).\tag{4.138b}$$

是自由场的拉格朗日密度,由 3.8 节的讨论知,在 PCT 的联合变换下也只是变数变号,形式不变.另外,(4.138a)式中 $\mathrm{i}\psi^+\dot{\psi}$ 是自由旋量场的拉格朗日密度

$$\mathscr{L}_{0\psi}=\bar{\psi}(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi\text{，}\mathscr{O}\mathscr{L}_{0\psi}(x)\mathscr{O}^{-1}=\mathscr{L}_{0\psi}(-x)\text{，}$$

的时间分量,所以有

$$\mathscr{O}\mathrm{i}\psi^\dagger(x)\dot{\psi}(x)\mathscr{O}^{-1}=\mathrm{i}\psi^\dagger(-x)\dot{\psi}(-x).\tag{4.139}$$

再由(4.135)式知,(4.138a)式中的 $-\dot{A}^\mu\dot{A}_\mu$ 在 PCT 的联合变换下变为

$$\mathscr{O}[-\dot{A}^\mu(x)\dot{A}_\mu(x)]\mathscr{O}^{-1}=-\dot{A}^\mu(-x)\dot{A}_\mu(-x).\tag{4.140}$$

综合(4.137)、(4.138b)、(4.139)及(4.140)的变换结果知,(4.138a)式的哈密顿密度在 PCT 的联合变化下,其变换形式为

$$\mathscr{O}\mathscr{H}(x)\mathscr{O}^{-1}=\mathscr{H}(-x)\text{，}\quad\text{或}\quad\mathscr{O}\mathscr{H}(-x)\mathscr{O}^{-1}=\mathscr{H}(x)\text{，}\tag{4.141}$$

即在 PCT 的联合变换下,本征加变数变换后的哈密顿密度保持不变.上式亦表明

$$\mathscr{O}H\mathscr{O}^{-1}=H\text{，}\quad\text{或}\quad\mathscr{O}H=H\mathscr{O}\text{，}\tag{4.142}$$

其中,$H=\int\mathscr{H}(x)\mathrm{d}^3x$ 为电磁作用的哈密顿.上式表明,PCT 联合变换的算符 $\mathscr{O}$ 与哈密顿算符对易,所以 $\mathscr{O}$ 是一种对称或不变变换,PCT 定理得证.

同样的方法可以证明,对于库仑规范下旋量场的电磁作用,PCT 定理也成立.

4.6.2　*PCT* 联合变换的应用

正反粒子的质量、自旋、自旋磁矩的 g 因子及寿命相等，内部相加性守恒荷等值反号. 这是一些早已被实验证明了的事实，广为人们所熟知. 这里将结合前面所得结果，采用 PCT 联合变换 $\mathscr{O}$ 对这些结论予以证明.

1. 正反粒子的质量相等

以 $|A\rangle$ 表示粒子的态矢，$|\overline{A}\rangle$ 为反粒子的态矢，则粒子的质量为

$$m_A = \langle A|H|A\rangle = \langle A|\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}H\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}|A\rangle \xlongequal{(4.142)\text{式}} \langle A|\mathscr{O}^{-1}H\mathscr{O}|A\rangle, \tag{4.143}$$

由(4.127)、(4.129)及(4.131)三式知，$\mathscr{O}$ 对态矢 $|A\rangle$ 作用的结果只是将其变成了反粒子的 $|\overline{A}\rangle$，除此之外，态矢的其他性质，如动量、自旋的取向及极化等都没有变化，所以

$$\mathscr{O}|A\rangle = |\overline{A}\rangle, \quad 或 \quad \langle A|\mathscr{O}^{-1} = \langle\overline{A}|. \tag{4.144}$$

这样(4.143)式变为

$$m_A = \langle\overline{A}|H|\overline{A}\rangle = m_{\overline{A}}, \tag{4.145}$$

结论得证.

2. 正反粒子的自旋相等

这里以旋量场为例来证明该结论.

$$\boldsymbol{s}_A = \langle A|\boldsymbol{s}|A\rangle = \langle A|\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}\boldsymbol{s}\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}|A\rangle = \langle\overline{A}|\mathscr{O}\boldsymbol{s}\mathscr{O}^{-1}|\overline{A}\rangle$$

其中，$\boldsymbol{s}$ 为旋量场的自旋. 由(4.127b)、(4.129b)及(4.131b)式知

$$\mathscr{O}\boldsymbol{s}\mathscr{O}^{-1} = \boldsymbol{s},$$

所以

$$\boldsymbol{s}_A = \langle\overline{A}|\boldsymbol{s}|\overline{A}\rangle = \boldsymbol{s}_{\overline{A}}, \tag{4.146}$$

结论得证.

3. 正反粒子的内部相加性守恒荷等值反号

对于旋量场的守恒流 $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$，前面曾得关系(4.136)式，即

$$\mathscr{O}j^\mu(x)\mathscr{O}^{-1} = -j^\mu(-x), \quad 或 \quad \mathscr{O}j^\mu(-x)\mathscr{O}^{-1} = -j^\mu(x). \tag{4.147}$$

对于复标量场，其守恒流由(2.139)式给出，为

$$j^\mu = -\mathrm{i}(\partial^\mu\phi^*\phi - \partial^\mu\phi\phi^*), \tag{4.148}$$

由(4.126)、(4.128)与(4.130)三式可直接证明，对于上式的 j^μ，关系(4.147)式仍然成立，因为

$$\begin{aligned}\mathscr{O}j^{\mu}(x)\mathscr{O}^{-1}&=\mathrm{i}[\partial^{\mu}\phi(-x)\phi^{*}(-x)-\partial^{\mu}\phi^{*}(-x)\phi(-x)]\\&=\mathrm{i}[(-\partial^{\mu})\phi^{*}(-x)\phi(-x)-(-\partial^{\mu})\phi(-x)\phi^{*}(-x)]\\&=-j^{\mu}(-x).\end{aligned}\tag{4.149}$$

这样,无论是旋量场还是复标量场,其守恒荷在 PCT 的联合变换下都有关系

$$\mathscr{O}Q\mathscr{O}^{-1}=\int\mathscr{O}j^{0}(-x)\mathscr{O}^{-1}\mathrm{d}^{3}x=-\int j^{0}(x)\mathrm{d}^{3}x=-Q,$$

即守恒荷在 PCT 的联合变化下变号. 这样

$$Q_{A}=\langle A|Q|A\rangle=\langle A|\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}Q\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}|A\rangle=-\langle\bar{A}|Q|\bar{A}\rangle=-Q_{\bar{A}},\tag{4.150}$$

结论得证.

4. 正反粒子自旋磁矩的 g 因子相等

粒子的自旋磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 与其自旋 $\boldsymbol{s}$ 间有关系

$$\boldsymbol{\mu}=g\,\frac{eQ}{2m}\boldsymbol{s},$$

其中,Q 是守恒荷,现在是电荷的算符. 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{A}&=\langle A|\boldsymbol{\mu}|A\rangle=\langle A|g\,\frac{eQ}{2m}\boldsymbol{s}|A\rangle=g_{A}\,\frac{eQ_{A}}{2m_{A}}\boldsymbol{s}_{A}\\&=\langle A|\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}g\,\frac{eQ}{2m}\boldsymbol{s}\mathscr{O}^{-1}\mathscr{O}|A\rangle\\&=\langle\bar{A}|\mathscr{O}g\,\frac{eQ}{2m}\boldsymbol{s}\mathscr{O}^{-1}|\bar{A}\rangle,\end{aligned}$$

考虑到 g 因子与 e 都是常数,所以

$$\boldsymbol{\mu}_{A}=g_{A}\,\frac{eQ_{A}}{2m_{A}}\boldsymbol{s}_{A}=-\langle\bar{A}|g\,\frac{eQ}{2m}\boldsymbol{s}|\bar{A}\rangle=-g_{\bar{A}}\,\frac{eQ_{\bar{A}}}{2m_{\bar{A}}}\boldsymbol{s}_{\bar{A}}=-\boldsymbol{\mu}_{\bar{A}},$$

由已得结果(4.145)、(4.146)与(4.150)三式知

$$g_{A}=g_{\bar{A}},\tag{4.151}$$

结论得证.

5. 正反粒子的寿命相等

这里以旋量场的电磁作用为例予以证明.

假设粒子 A 的初态为 $|A\rangle$,自发衰变成多个粒子的末态为 $|B\rangle$,则由(4.116a)式知

$$\frac{1}{\tau_{A\to B}}=\Gamma_{A\to B}=\int\frac{\overline{\sum\limits_{AB}}|\langle B|R|A\rangle|^{2}}{T}\prod_{B}\frac{V\mathrm{d}^{3}p_{B}}{(2\pi)^{3}},$$

其中的

$$|\langle B|R|A\rangle|^2=|\langle B|\mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}R\mathcal{O}^{-1}\mathcal{O}|A\rangle|^2=|\langle\bar{B}|\mathcal{O}R\mathcal{O}^{-1}|\bar{A}\rangle|^2. \tag{4.152}$$

由 S 矩阵的微扰展开(4.54)式知,R 是相互作用哈密顿的编时乘积,对于旋量场的电磁作用,其相互作用的哈密顿密度为

$$\mathcal{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x),\quad \xrightarrow{(4.141)\text{式}}\mathcal{O}\mathcal{H}_i(-x)\mathcal{O}^{-1}=\mathcal{H}_i(x),$$

这样,对于变换 $\mathcal{O}R\mathcal{O}^{-1}$,分两种情况:当微扰展开项不带有虚数因子 i 时,不变,反之,变一负号.但这种变化对于(4.152)式的绝对值运算没有影响,所以

$$|\langle B|R|A\rangle|^2=|\langle\bar{B}|R|\bar{A}\rangle|^2.$$

这样

$$\frac{1}{\tau_{A\to B}}=\Gamma_{A\to B}=\int\frac{\bar{\sum\limits_{AB}}|\langle B|R|A\rangle|^2}{T}\prod_B\frac{V\mathrm{d}^3p_B}{(2\pi)^3}=\int\frac{\bar{\sum\limits_{\bar{A}\bar{B}}}|\langle\bar{B}|R|\bar{A}\rangle|^2}{T}\prod_{\bar{B}}\frac{V\mathrm{d}^3p_{\bar{B}}}{(2\pi)^3}.$$

再考虑到 PCT 的联合变换不改变粒子的动量、自旋及极化等,则有

$$\tau_{A\to B}=\tau_{\bar{A}\to\bar{B}}, \tag{4.153}$$

结论得证.

至此,我们分别在 2.6 节、3.8 节及本节讨论了场的 PCT 变换.2.6 节是关于自由经典场的,3.8 节是关于自由量子场的,两者都是关于 PCT 各自独立的变换,前者是后者的基础,后者是本节的基础.本节讨论的是 PCT 的联合变换,是对前两节内容的重要补充,表明 PCT 变换并不只是一种简单的对称变换,而是有着实际而重要的应用.

第 5 章　树 图 近 似

本章将采用第 4 章介绍的微扰理论与费曼规则,计算一些具体的物理过程,阐述微扰理论与费曼规则的应用方法和步骤. 这里,我们将只考虑最低级近似,叫做树图近似,有时也称零级近似. 所谓树图,指的是费曼图中没有闭合圈,如电子自能或真空极化等,含有闭合圈的费曼图叫圈图,圈图的计算结果总是发散的,需要用重整化方法进行处理,这方面内容将在第 6 章再作介绍.

5.1　电子对湮灭为 μ 子对或强子

电子对撞机,如北京正负电子对撞机,是一种重要的高能粒子加速器. 被加速的正负电子碰撞后,可产生不同的粒子,其中包括电子对湮灭为 μ 子对或强子的过程. 电子对湮灭为 μ 子对的过程是

$$e^-(p,s)+e^+(q,\tau)\rightarrow\mu^-(p',s')+\mu^+(q',\tau'),\tag{5.1}$$

该过程,相互作用的哈密顿密度为

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x).$$

最低级的费曼图如图 5.1 所示.

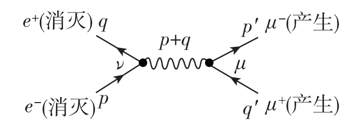


图 5.1　电子对湮灭为 μ 子对的费曼图

按照第 4 章所介绍的费曼规则,与图 5.1 所对应的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}S_{e\mu}^{(2)}=&(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\sqrt{\frac{m_\mu}{VE_{\mu^-}}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\\&\times\sqrt{\frac{m_\mu}{VE_{\mu^+}}}v(q',\tau')\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{(p+q)^2}\sqrt{\frac{m_e}{VE_{e^+}}}\bar{v}(q,\tau)(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\sqrt{\frac{m_e}{VE_{e^-}}}u(p,s).\end{aligned}\tag{5.2}$$

5.1.1　碰撞截面

由(4.124)式知,两粒子的碰撞截面为

$$\sigma=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2JV}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}.$$

在质心系中，$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{q}$，则由(4.117)～(4.122)式知，入射的电子束流密度为

$$J=\rho|\boldsymbol{v}_r|=\frac{1}{V}|\boldsymbol{p}|\left(\frac{1}{E_{e^-}}+\frac{1}{E_{e^+}}\right)\xlongequal{E_{e^-}=E_{e^+}=E_e}\frac{2|\boldsymbol{p}|}{VE_e}. \tag{5.3}$$

又由定义(4.106)式

$$N_i=\frac{E_e}{m_e},\quad N_f=\frac{E_\mu}{m_\mu}. \tag{5.4}$$

另外

$$\begin{aligned}&\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)|^2\frac{e^4}{(p+q)^4},\\&\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}=\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{5.5}$$

这样

$$\begin{aligned}\sigma_{e\mu}=&\int(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')\frac{m_e^2m_\mu^2}{2|\boldsymbol{p}|E_eE_\mu^2}\frac{e^4}{(p+q)^4}\\&\times\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)|^2\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.1.2　自旋的平均与求和

如第4章所述，(5.6)式中的符号$\bar{\sum}$代表对初态电子对的自旋求平均，对末态μ子对的自旋求和.考虑到电子的自旋有两个取向，所以

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|\cdots|^2=&\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)|^2\\=&\frac{1}{2}\sum_s\frac{1}{2}\sum_\tau\sum_{s'\tau'}|\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)|^2\\=&\frac{1}{4}\sum_{s\tau}\sum_{s'\tau'}\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)\\&\times\bar{u}(p,s)\gamma_0\gamma^{\nu+}\gamma_0v(q,\tau)\bar{v}(q',\tau')\gamma_0\gamma_\nu^\dagger\gamma_0u(p',s')\\\xlongequal{(1.19)\text{式}}&\frac{1}{4}\sum_{s\tau}\sum_{s'\tau'}\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)\\&\times\bar{u}(p,s)\gamma^\nu v(q,\tau)\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu u(p',s').\end{aligned}$$

由于$\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu u(p',s')$是个$C$数，所以

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|\cdots|^2=&\frac{1}{4}\sum_{s\tau}\sum_{s'\tau'}\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu u(p',s')\\&\times\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma^\nu v(q,\tau).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu u(p',s')\\=&\bar{u}_\alpha(p',s')(\gamma_\mu)^{\alpha\beta}v_\beta(q',\tau')\bar{v}_\sigma(q',\tau')(\gamma_\nu)^{\sigma\rho}u_\rho(p',s')\\=&\mathrm{Tr}u(p',s')\bar{u}(p',s')\gamma_\mu v(q',\tau')\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu.\end{aligned}$$

所以

$$\bar{\sum}|\cdots|^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\sum_{s'}u(p',s')\bar{u}(p',s')\gamma_\mu\sum_{\tau'}v(q',\tau')\bar{v}(q',\tau')\gamma_\nu$$
$$\times\mathrm{Tr}\sum_{\tau}v(q,\tau)\bar{v}(q,\tau)\gamma^\mu\sum_{s}u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma^\nu.$$

再由(1.42)式

$$\bar{\sum}|\cdots|^2 = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot p'+m_\mu}{2m_\mu}\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot q'-m_\mu}{2m_\mu}\gamma_\nu\right)\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot q-m_e}{2m_e}\gamma^\mu\frac{\gamma\cdot p+m_e}{2m_e}\gamma^\nu\right)$$
$$=\frac{1}{64m_e^2m_\mu^2}\mathrm{Tr}[(\gamma\cdot p'+m_\mu)\gamma_\mu(\gamma\cdot q'-m_\mu)\gamma_\nu]\mathrm{Tr}[(\gamma\cdot q-m_e)\gamma^\mu(\gamma\cdot p+m_e)\gamma^\nu].$$

注意到γ矩阵的求迹定理Ⅰ,即(1.54)式,奇数个γ矩阵的迹为零,则

$$\bar{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{64m_e^2m_\mu^2}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot q'\gamma_\nu-m_\mu^2\gamma_\mu\gamma_\nu)\mathrm{Tr}(\gamma\cdot q\gamma^\mu\gamma\cdot p\gamma^\nu-m_e^2\gamma^\mu\gamma^\nu).$$

由γ矩阵的求迹定理Ⅱ,即(1.55)式知

$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4g_{\mu\nu},$$
$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\gamma\cdot p'\gamma_\mu\gamma\cdot q'\gamma_\nu &= p'^\alpha q'^\beta\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta\gamma_\nu)\\ &= p'^\alpha q'^\beta 4(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu}+g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta})\\ &= 4(p'_\mu q'_\nu-g_{\mu\nu}p'\cdot q'+q'_\mu p'_\nu),\end{aligned}$$

同理

$$\mathrm{Tr}\gamma\cdot q\gamma^\mu\gamma\cdot p\gamma^\nu=4(q^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}q\cdot p+p^\mu q^\nu),$$

则

$$\bar{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{64m_e^2m_\mu^2}4(p'_\mu q'_\nu-g_{\mu\nu}p'\cdot q'+q'_\mu p'_\nu-g_{\mu\nu}m_\mu^2)4(q^\mu p^\nu-g^{\mu\nu}p\cdot q+p^\mu q^\nu-g^{\mu\nu}m_e^2).$$

注意到$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=4$,则

$$\bar{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{2m_e^2m_\mu^2}[2m_e^2m_\mu^2+m_\mu^2p\cdot q+m_e^2p'\cdot q'+(p\cdot p')(q\cdot q')+(p\cdot q')(p'\cdot q)].$$

在高能对撞中,能量很高,m_e^2(或m_μ^2)$\ll|\boldsymbol{p}|^2$(或$|\boldsymbol{p}'|^2$),所以质量相对于能量或动量可忽略不计,上式变为

$$\bar{\sum}|\cdots|^2\simeq\frac{1}{2m_e^2m_\mu^2}[(p\cdot p')(q\cdot q')+(p\cdot q')(p'\cdot q)].$$

由能量、动量守恒

$$p+q=p'+q',\Rightarrow p-p'=q'-q\quad 或\quad p-q'=p'-q,$$

得

$$m_e^2+m_\mu^2-2p\cdot p'=m_e^2+m_\mu^2-2q\cdot q',\Rightarrow p\cdot p'=q\cdot q',$$

或

$$m_e^2+m_\mu^2-2p\cdot q'=m_e^2+m_\mu^2-2q\cdot p',\Rightarrow p\cdot q'=p'\cdot q.$$

这样

$$\bar{\sum}|\cdots|^2=\frac{1}{2m_e^2m_\mu^2}[(p\cdot p')^2+(p\cdot q')^2].$$

在质心系中

$$(p\cdot p')^2+(p\cdot q')^2=(E_eE_\mu-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2+(E_eE_\mu-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}')^2$$
$$\xlongequal{\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{q}'}(E_eE_\mu-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2+(E_eE_\mu+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')^2.$$

又

$$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}=E\boldsymbol{v}\xlongequal{\text{高能对撞}}Ec\,\boldsymbol{v}_0=E\boldsymbol{v}_0,$$

其中，$\boldsymbol{v}_0$ 为 $\boldsymbol{v}$ 方向的单位矢量，则上式变为

$$(p\cdot p')^2+(p\cdot q')^2=E_e^2E_\mu^2(1-\cos\theta)^2+E_e^2E_\mu^2(1+\cos\theta)^2=2E_e^2E_\mu^2(1+\cos^2\theta),$$

其中，θ 是电子动量 $\boldsymbol{p}$ 和 μ^- 子动量 $\boldsymbol{p}'$之间的夹角. 这样

$$\bar{\sum}|\cdots|^2=\frac{E_e^2E_\mu^2}{m_e^2m_\mu^2}(1+\cos^2\theta).\tag{5.7}$$

另

$$(p+q)^2=p^2+q^2+2p\cdot q=m_e^2+m_e^2+2E_e^2-2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q},$$

在质心系与高能情况下

$$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{q},\quad |\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{q}|=E_e,\tag{5.8}$$

则

$$(p+q)^2\simeq 4E_e^2.\tag{5.9}$$

将(5.7)与(5.9)代入(5.6)式得

$$\sigma_{e\mu}=e^4\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p+q-p'-q')}{32E_e^4}(1+\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3}.\tag{5.10}$$

5.1.3　终态积分

变写(5.10)式得

$$\sigma_{e\mu}=\frac{e^4}{32E_e^4(2\pi)^2}\int\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')$$
$$\times\delta[E_{e^-}(\boldsymbol{p})+E_{e^+}(\boldsymbol{q})-E_{\mu^-}(\boldsymbol{p}')-E_{\mu^+}(\boldsymbol{q}')](1+\cos^2\theta)\mathrm{d}^3p'\mathrm{d}^3q'.$$

注意到在质心系中，$\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{q}'$，完成 d^3p'的积分消去$\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{q}')$得

$$\sigma_{e\mu}=\frac{e^4}{32E_e^4(2\pi)^2}\int\delta[E_{e^-}(\boldsymbol{p})+E_{e^+}(-\boldsymbol{p})-E_{\mu^-}(-\boldsymbol{q}')-E_{\mu^+}(\boldsymbol{q}')](1+\cos^2\theta)\mathrm{d}^3q'.$$

由于 $E_{e^-}(\boldsymbol{p})=E_{e^+}(-\boldsymbol{p})=E_e$，$E_{\mu^-}(-\boldsymbol{q}')=E_{\mu^+}(\boldsymbol{q}')=E_\mu=E_f$，所以

$$\delta[E_{e^-}(\boldsymbol{p})+E_{e^+}(-\boldsymbol{p})-E_{\mu^-}(-\boldsymbol{q}')-E_{\mu^+}(\boldsymbol{q}')]=\delta(2E_e-2E_f)=\frac{1}{2}\delta(E_e-E_f),$$

取球坐标系，极轴沿电子的入射方向，则 μ^- 与电子间的夹角 θ 成为极角，这样

$$\mathrm{d}^3q'=|\boldsymbol{q}'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{q}'|\mathrm{d}\Omega\xlongequal{\text{高能对撞}}E_f^2\mathrm{d}E_f\mathrm{d}\Omega,$$

$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$，所以

$$\sigma_{e\mu} = \frac{e^4}{64E_e^4(2\pi)^2}\int \delta(E_e - E_f)(1+\cos^2\theta)E_f^2 dE_f d\Omega$$
$$= \frac{e^4}{64E_e^2(2\pi)^2}\int (1+\cos^2\theta) d\Omega.$$

再完成对立体角的积分，得

$$\sigma_{e\mu} = \frac{\pi\alpha^2}{3E_e^2}, \quad 或 \quad \sigma_{e\mu} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{5.11}$$

其中

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \xlongequal{(0.22)式} \frac{1}{137},$$

为精细结构常数，$\sqrt{s} = 2E_e$ 为质心能量.(5.11)式表明，$\sigma_{e\mu}$ 与入射电子能量的平方成反比，这一结果已得到实验很好的证明.

5.1.4　电子对湮灭为强子

电子对不但可湮灭为 μ 子对，在入射能量足够高时，还可以湮灭为强子(介子+重子).强子是由夸克组成的，其中的夸克，由于色禁闭效应，只能囚禁于强子中，不能自由、独立地存在.因此，电子对湮灭为强子的过程，可以看成是电子对先湮灭为虚光子、虚光子随后形成夸克对、夸克对再以百分之百的几率变为强子，即

$$e^- + e^+ \to \gamma \to q + \bar{q} \to 强子. \tag{5.12}$$

相应的费曼图如图 5.2 所示.

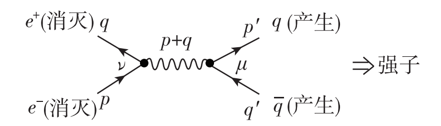


图 5.2　电子对湮灭为强子的费曼图

反应过程 $e^- e^+ \to q\bar{q}$ 是电磁作用，决定这一过程的哈密顿密度为

$$\mathcal{H}_i(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) - eQ_j\bar{q}_j(x)\gamma_\mu q_j(x)A^\mu(x),$$

其中，$q_j(x)$ 是味道为 j 的夸克场算符，Q_j 是它的电荷数.夸克对形成强子的过程是强作用，由于夸克对以百分之百的几率形成强子，因此在实际计算中，只需计算出电子对湮灭为夸克对的几率就够了，该几率就是电子对湮灭为强子的几率.

电子对湮灭为夸克对的费曼图与电子对湮灭为 μ 子对的费曼图一样，差别仅在于电荷不同.夸克的电荷为分数：eQ_j，$Q_j = 2/3$ 或 $-1/3$；μ 子的电荷为 e，这一差异将导致顶角因子的不同，如图 5.3 所示.

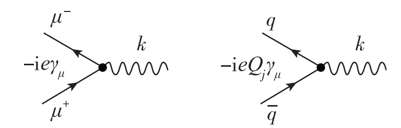


图 5.3　μ 子对及夸克对电磁作用顶角的费曼图

这样在(5.11)式中,只需作代换

$$e^4 \Rightarrow e^2\ (eQ_j)^2, \quad 或 \quad \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 Q_j^2,$$

即可得

$$\sigma_{eq_j} = \frac{\pi\alpha^2}{3E_e^2}Q_j^2, \quad 或 \quad \sigma_{eq_j} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}Q_j^2. \tag{5.13}$$

电子对湮灭为各种可能的夸克对,然后以百分之百的几率变成末态强子,所以电子对湮灭为各种可能强子的截面为

$$\sigma_{eh} = \frac{\pi\alpha^2}{3E_e^2}c\sum_j Q_j^2. \tag{5.14}$$

其中,c 是夸克的颜色数.理论与实验研究都表明,每味夸克有红、绿、蓝三种颜色,即 $c=3$.考虑比值

$$R = \frac{\sigma_{eh}}{\sigma_{e\mu}} = c\sum_j Q_j^2,$$

若 $e^- + e^+$ 的质心能量 $\sqrt{s} < 3$ GeV,则只能有 u、d、s 三味夸克产生,其中

$$Q_u = \frac{2}{3}, \quad Q_d = -\frac{1}{3}, \quad Q_s = -\frac{1}{3},$$

故

$$R = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2\right] = 2,$$

这与实验测量 $R \simeq 2$ 相符合,表明夸克应有 $c=3$ 种颜色,这是一已被广泛实验证明了的事实.

5.2　康普顿散射

康普顿散射,也叫康普顿效应,指的是 γ 光子经物质散射后,其频率或波长发生变化的现象,该现象首先由美国物理学家康普顿于 1922～1923 年由实验发现并给出理论解释.康普顿散射是一种量子效应,是对爱因斯坦于 1905 年为解释光电效应所提出的光量子假设的又一次证明.这里我们将讨论该散射过程的散射截面.

考虑到相对于 γ 光子的能量,原子中电子的结合能很小,可忽略不计,因此康普顿散射可看成是 γ 光子被自由电子散射的过程,即

$$\gamma(k,\lambda) + e^-(p,s) \to \gamma(k',\lambda') + e^-(p',s'), \tag{5.15}$$

该过程是电磁的,相互作用的哈密顿密度为

$$\mathcal{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x),$$

树图近似下的费曼图如图 5.4 所示.

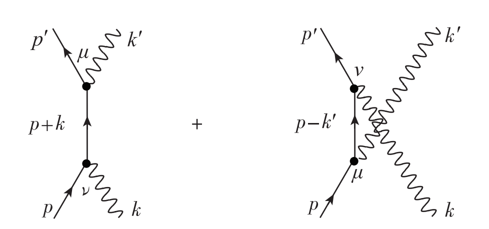


图 5.4　康普顿散射过程的费曼图

相应的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}S_{fi}^{(2)}=&(2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')\sqrt{\frac{m}{VE'}}\bar{u}(p',s')\\&\times\left[(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p+k)-m}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)+(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k')-m}(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\right]\\&\times\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)\frac{e^\mu(k',\lambda')}{\sqrt{2V\omega'}}\frac{e^\nu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}.\end{aligned}\tag{5.16}$$

5.2.1　散射截面

按照(4.124)式,散射截面

$$\sigma=\int\frac{(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)}{N_i^2N_f^2JV}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\prod_f\frac{\mathrm{d}^3p_f}{(2\pi)^3}.$$

在实验室坐标系中,电子不动,$p=(m,0)$,亦即初态电子的 $E=m$,而光子的速度 $c=1$,所以入射光子的束流密度为

$$J=\rho|\boldsymbol{v}_r|=\frac{1}{V}c=\frac{1}{V},$$

$$N_i=\sqrt{2\omega}\sqrt{\frac{E}{m}}=\sqrt{2\omega},\quad N_f=\sqrt{2\omega'}\sqrt{\frac{E'}{m}},$$

或

$$N_i=\sqrt{2\omega'}\sqrt{\frac{E}{m}}=\sqrt{2\omega'},\quad N_f=\sqrt{2\omega}\sqrt{\frac{E'}{m}},$$

故

$$N_i^2N_f^2=\frac{4\omega\omega'E'}{m}.$$

而

$$|T_{fi}|^2=e^4\left|\bar{u}(p',s')\left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu+\gamma_\nu \frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s)e^\mu(k',\lambda')e^\nu(k,\lambda)\right|^2,$$

$$\prod_f \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{(2\pi)^3}=\frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3},$$

这样

$$\sigma=\int \frac{m\ (2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{4E'\omega\omega'}\bar{\sum}|T_{fi}|^2\ \frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3}\ \frac{\mathrm{d}^3 k'}{(2\pi)^3}. \tag{5.17}$$

其中,$\bar{\sum}$表示对初态粒子的自旋、极化求平均,对终态粒子的自旋、极化求和.

5.2.2 光子极化的平均与求和

在实验中,入射光子是非极化的,也不测量出射光子的极化.因此,在计算中需要对入射光子的极化求平均,对出射光子的极化求和,用$\bar{\sum}_{\lambda\lambda'}$表示该运算,考虑到光子只有两个横向极化方向,则

$$\begin{aligned}\bar{\sum}_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2&=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{2}\sum_{\lambda\lambda'}|L_{\mu\nu}(k,k')e^\mu(k',\lambda')e^\nu(k,\lambda)|^2\\&=\frac{e^4}{2}\sum_{\lambda\lambda'}L_{\mu\nu}(k,k')e^\mu(k',\lambda')e^\nu(k,\lambda)e^{\beta\dagger}(k,\lambda)e^{\alpha\dagger}(k',\lambda')L^\dagger_{\alpha\beta}(k,k'),\end{aligned}$$

其中

$$L_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p',s')\left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_\nu+\gamma_\nu \frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s). \tag{5.18}$$

由于λ与λ'只求和至2,$e^{\mu\dagger}(k,1)=e^\mu(k,1)$,$e^{\mu\dagger}(k,2)=e^\mu(k,2)$,由(1.116)式知

$$\sum_{\lambda=1}^2 e^\mu(k,\lambda)e^\nu(k,\lambda)=-g^{\mu\nu}-\frac{k^\mu k^\nu}{(k\cdot\eta)^2}+\frac{k^\mu\eta^\nu+\eta^\mu k^\nu}{(k\cdot\eta)},$$

所以

$$\begin{aligned}\bar{\sum}_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2=&\frac{e^4}{2}L_{\mu\nu}(k,k')\left[-g^{\mu\alpha}-\frac{k'^\mu k'^\alpha}{(k'\cdot\eta)^2}+\frac{k'^\mu\eta^\alpha+\eta^\mu k'^\alpha}{k'\cdot\eta}\right]\\&\times\left[-g^{\nu\beta}-\frac{k^\nu k^\beta}{(k\cdot\eta)^2}+\frac{k^\nu\eta^\beta+\eta^\nu k^\beta}{k\cdot\eta}\right]L^\dagger_{\alpha\beta}(k,k').\end{aligned}$$

又

$$k^\nu L_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p',s')\left[\gamma_\mu \frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma\cdot k+\gamma\cdot k \frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_\mu\right]u(p,s), \tag{5.19}$$

由(1.40)式知

$$(\gamma\cdot p-m)u(p,s)=0,$$

故(5.19)式中括号内第一项的

$$\gamma\cdot k u(p,s)=[\gamma\cdot(k+p)-m]u(p,s),$$

又 $k=p'+k'-p$,且由(1.41)式知

$$\bar{u}(p',s')(\gamma\cdot p'-m)=0,$$

则(5.19)式中括号内第二项的

$$\begin{aligned}\bar{u}(p',s')\gamma\cdot k &=\bar{u}(p',s')\gamma\cdot(p'+k'-p)\\&=\bar{u}(p',s')(\gamma\cdot p'-m)-\bar{u}(p',s')[\gamma\cdot(p-k')-m]\\&=-\bar{u}(p',s')[\gamma\cdot(p-k')-m].\end{aligned}$$

所以

$$k^{\nu}L_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p',s')(\gamma_{\mu}-\gamma_{\mu})u(p,s)=0.$$

同样可证明

$$\begin{aligned}&k^{\nu}L^{\dagger}_{\mu\nu}(k,k')=k^{\nu}L_{\mu\nu}(k,k')=0,\\&k'^{\mu}L^{\dagger}_{\mu\nu}(k,k')=k'^{\mu}L_{\mu\nu}(k,k')=0.\end{aligned}\tag{5.20}$$

这样

$$\begin{aligned}\bar{\sum}_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2&=\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{2}L_{\mu\nu}(k,k')L^{\dagger\mu\nu}(k,k')=\frac{e^4}{2}|L_{\mu\nu}(k,k')|^2\\&=\frac{e^4}{2}\left|\bar{u}(p',s')\left[\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\mu}\right]u(p,s)\right|^2.\end{aligned}\tag{5.21}$$

例 5.1　证明(5.20)式

证明　由(5.18)式知

$$L^{\dagger}_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p,s)\left[\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\mu}+\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\nu}\right]u(p',s'),$$

则

$$k^{\nu}L^{\dagger}_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p,s)\left[\frac{\gamma\cdot k}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\mu}+\gamma_{\mu}\frac{\gamma\cdot k}{\gamma\cdot(p-k')-m}\right]u(p',s').\tag{5.22}$$

由于

$$\bar{u}(p,s)(\gamma\cdot p-m)=0,$$

故(5.22)式中括号内的第一项

$$\bar{u}(p,s)\frac{\gamma\cdot k}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\mu}=\bar{u}(p,s)\frac{\gamma\cdot(p+k)-m}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\mu}=\bar{u}(p,s)\gamma_{\mu}.$$

又 $k=p'+k'-p$,则(5.22)式第二项

$$\begin{aligned}\gamma_{\mu}\frac{\gamma\cdot k}{\gamma\cdot(p-k')-m}u(p',s')&=\gamma_{\mu}\frac{\gamma\cdot(p'+k'-p)}{\gamma\cdot(p-k')-m}u(p',s')\\&=\gamma_{\mu}\frac{(\gamma\cdot p'-m)-[\gamma\cdot(p-k')-m]}{\gamma\cdot(p-k')-m}u(p',s')\\&=-\gamma_{\mu}u(p',s'),\end{aligned}$$

上式最后一步用到了关系：$(\gamma\cdot p'-m)u(p',s')=0$. 因此

$$k^{\nu}L^{\dagger}_{\mu\nu}(k,k')=0,\ \Rightarrow\ (5.20)\text{第 1 式得证.}$$

同理

$$k'^{\mu}L_{\mu\nu}(k,k')=\bar{u}(p',s')\left[\frac{\gamma\cdot k'}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{\gamma\cdot k'}{\gamma\cdot(p-k')-m}\right]u(p,s),$$

由于 $k'=p+k-p'$，则上式中括号内第一项

$$\begin{aligned}\bar{u}(p',s')\frac{\gamma\cdot k'}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}&=\bar{u}(p',s')\frac{\gamma\cdot(p+k)-\gamma\cdot p'}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}\\&=\bar{u}(p',s')\frac{\gamma\cdot(p+k)-m-(\gamma\cdot p'-m)}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}\\&=\bar{u}(p',s')\gamma_{\nu},\end{aligned}$$

第二项

$$\gamma_{\nu}\frac{\gamma\cdot k'}{\gamma\cdot(p-k')-m}u(p,s)=\gamma_{\nu}\frac{\gamma\cdot k'-\gamma\cdot p+m}{\gamma\cdot(p-k')-m}u(p,s)=-\gamma_{\nu}u(p,s),$$

故

$$k'^{\mu}L_{\mu\nu}(k,k')=0,\ \Rightarrow\ (5.20)\text{第 2 式得证.}$$

5.2.3　电子自旋的平均与求和

物质中的电子是非极化的，所以在计算中要对初态电子的自旋求平均，对终态电子的自旋求和，用 $\bar{\sum}_{ss'}$ 表示该运算，则

$$\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\bar{\sum}_{ss'}\bar{\sum}_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2=\frac{1}{2}\sum_{ss'}\frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'}|T_{fi}|^2,$$

将(5.21)式代入得

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|T_{fi}|^2&=\frac{e^4}{4}\sum_{ss'}\left|\bar{u}(p',s')\left[\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\mu}\right]u(p,s)\right|^2\\&=\frac{e^4}{4}\sum_{ss'}\bar{u}_{\alpha}(p',s')\left[\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\mu}\right]^{\alpha\beta}u_{\beta}(p,s)\\&\quad\times\bar{u}_{\sigma}(p,s)\left[\gamma^{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^{\nu}\right]^{\sigma\rho}u_{\rho}(p',s')\\&=\frac{e^4}{4}\sum_{ss'}\mathrm{Tr}u(p',s')\bar{u}(p',s')\left[\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\mu}\right]\\&\quad\times u(p,s)\bar{u}(p,s)\left[\gamma^{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^{\nu}\right]\\&=\frac{e^4}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot p'+m}{2m}\right)\left[\gamma_{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma_{\mu}\right]\\&\quad\times\left(\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\right)\left[\gamma^{\nu}\frac{1}{\gamma\cdot(p+k)-m}\gamma^{\mu}+\gamma^{\mu}\frac{1}{\gamma\cdot(p-k')-m}\gamma^{\nu}\right].\end{aligned}$$

由(3.205)式知

$$(\gamma\cdot p)^2=p^2,$$

这样

$$\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{\gamma\cdot p'+m}{2m}\right)\left[\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{(p+k)^2-m^2}\gamma_\nu+\gamma_\nu\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma_\mu\right]$$
$$\times\left(\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\right)\left[\gamma^\nu\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{(p+k)^2-m^2}\gamma^\mu+\gamma^\mu\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{(p-k')^2-m^2}\gamma^\nu\right].$$

考虑到

$$(p+k)^2-m^2=p^2+2p\cdot k+k^2-m^2=2p\cdot k,$$
$$(p-k')^2-m^2=p^2-2p\cdot k'+k'^2-m^2=-2p\cdot k',$$

则

$$\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{16m^2}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\left[\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{2p\cdot k}\gamma_\nu-\gamma_\nu\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{2p\cdot k'}\gamma_\mu\right]$$
$$\times(\gamma\cdot p+m)\left[\gamma^\nu\frac{\gamma\cdot(p+k)+m}{2p\cdot k}\gamma^\mu-\gamma^\mu\frac{\gamma\cdot(p-k')+m}{2p\cdot k'}\gamma^\nu\right].$$

将上式展开,共有四个矩阵因子的求迹,可写成

$$\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{64m^2}\left[\frac{\mathrm{I}}{(p\cdot k)(p\cdot k)}-\frac{\mathrm{II}}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{\mathrm{III}}{(p\cdot k')(p\cdot k)}+\frac{\mathrm{IV}}{(p\cdot k')(p\cdot k')}\right],\tag{5.23}$$

其中

$$\mathrm{I}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma_\nu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\nu[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma^\mu,$$
$$\mathrm{II}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma_\nu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\mu[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma^\nu,$$
$$\mathrm{III}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma_\mu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\nu[\gamma\cdot(p+k)+m]\gamma^\mu,$$
$$\mathrm{IV}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma_\mu(\gamma\cdot p+m)\gamma^\mu[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma^\nu.$$

在上式的求迹表达式中,最多包含有 8 个 γ 矩阵的乘积,计算显得很麻烦,但是利用第 1 章介绍过的 γ 矩阵的求迹与夹积定理,就不难将它们算出.

首先,由 γ 矩阵的夹积定理,即(1.57)式知

$$\gamma_\mu\gamma^\mu=4,$$
$$\gamma_\mu a\cdot\gamma\gamma^\mu=-2a\cdot\gamma,$$
$$\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma\gamma^\mu=4a\cdot b,$$
$$\gamma_\mu a\cdot\gamma b\cdot\gamma c\cdot\gamma\gamma^\mu=-2c\cdot\gamma b\cdot\gamma a\cdot\gamma.$$

则

$$\mathrm{I}=\mathrm{Tr}(4m-2\gamma\cdot p')[\gamma\cdot(p+k)+m](4m-2\gamma\cdot p)[\gamma\cdot(p+k)+m].$$
$$\mathrm{II}=\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'+m)\gamma_\mu[\gamma\cdot(p+k)\gamma_\nu\gamma\cdot p+m\gamma\cdot(p+k)\gamma_\nu+m\gamma_\nu\gamma\cdot p+m^2\gamma_\nu]\gamma^\mu$$
$$\times[\gamma\cdot(p-k')+m]\gamma^\nu.$$

注意到

$$\gamma_\nu = \gamma \cdot n, \tag{5.24}$$

其中，$n_\nu = 1$，其余分量为 0，则

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)[-2\gamma \cdot p \gamma_\nu \gamma \cdot (p+k) + 4m(p+k)_\nu + 4m p_\nu - 2m^2 \gamma_\nu] \\
&\quad \times [\gamma \cdot (p-k') + m]\gamma^\nu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)(-2\gamma \cdot p)[4(p+k)\cdot(p-k') - 2m\gamma \cdot (p+k)] \\
&\quad + \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)4m[\gamma \cdot (p-k') + m]\gamma \cdot (2p+k) \\
&\quad + \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)(-2m^2)[4m - 2\gamma \cdot (p-k')].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)\gamma_\nu[\gamma \cdot (p-k')\gamma_\mu \gamma \cdot p + m\gamma \cdot (p-k')\gamma_\mu + m\gamma_\mu \gamma \cdot p + m^2 \gamma_\mu]\gamma^\nu \\
&\quad \times [\gamma \cdot (p+k) + m]\gamma^\mu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)[-2\gamma \cdot p \gamma_\mu \gamma \cdot (p-k') + 4m(p-k')_\mu + 4m p_\mu - 2m^2 \gamma_\mu] \\
&\quad \times [\gamma \cdot (p+k) + m]\gamma^\mu \\
&= \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)(-2\gamma \cdot p)[4(p-k')\cdot(p+k) - 2m\gamma \cdot (p-k')] \\
&\quad + \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)4m[\gamma \cdot (p+k) + m]\gamma \cdot (2p-k') \\
&\quad + \mathrm{Tr}(\gamma \cdot p' + m)(-2m^2)[4m - 2\gamma \cdot (p+k)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV} &= \mathrm{Tr}\gamma^\nu(\gamma \cdot p' + m)\gamma_\nu[\gamma \cdot (p-k') + m]\gamma_\mu(\gamma \cdot p + m)\gamma^\mu[\gamma \cdot (p-k') + m] \\
&= \mathrm{Tr}(4m - 2\gamma \cdot p')[\gamma \cdot (p-k') + m](4m - 2\gamma \cdot p)[\gamma \cdot (p-k') + m].
\end{aligned}$$

再由 γ 矩阵的求迹定理 I，即(1.54)式知，奇数个 γ 矩阵乘积的迹为 0，则

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \mathrm{Tr}[4m^2 - 2(\gamma \cdot p')\gamma \cdot (p+k) - 2m\gamma \cdot (p' - 2p - 2k)] \\
&\quad \times [4m^2 - 2(\gamma \cdot p)\gamma \cdot (p+k) + 2m\gamma \cdot (p+2k)].
\end{aligned}$$

展开上式并只保留偶数个 γ 矩阵的乘积项，且注意到

$$p' = p + k - k', \tag{5.25}$$

得

$$\begin{aligned}
\text{I} &= \mathrm{Tr}[16m^4 + 4(\gamma \cdot p')\gamma \cdot (p+k)(\gamma \cdot p)\gamma \cdot (p+k) \\
&\quad - 8m^2 \gamma \cdot (p+p')\gamma \cdot (p+k) + 4m^2 \gamma \cdot (p+k+k')\gamma \cdot (p+2k)] \\
&= \mathrm{Tr}[16m^4 + 4\gamma \cdot (p+k-k')\gamma \cdot (p+k)(\gamma \cdot p)\gamma \cdot (p+k) \\
&\quad - 8m^2 \gamma \cdot (2p+k-k')\gamma \cdot (p+k) + 4m^2 \gamma \cdot (p+k+k')\gamma \cdot (p+2k)].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} &= \mathrm{Tr}[\gamma \cdot (p+k-k') + m](-2\gamma \cdot p)[4(p+k)\cdot(p-k') - 2m\gamma \cdot (p+k)] \\
&\quad + \mathrm{Tr}[(\gamma \cdot (p+k-k') + m]4m[\gamma \cdot (p-k') + m]\gamma \cdot (2p+k) \\
&\quad + \mathrm{Tr}[\gamma \cdot (p+k-k') + m](-2m^2)[4m - 2\gamma \cdot (p-k')]. \\
&= \mathrm{Tr}[-8(p+k)\cdot(p-k')\gamma \cdot (p+k-k')(\gamma \cdot p) + 4m^2(\gamma \cdot p)\gamma \cdot (p+k)] \\
&\quad + \mathrm{Tr}4m^2 \gamma \cdot (2p+k-2k')\gamma \cdot (2p+k) \\
&\quad + \mathrm{Tr}[4m^2 \gamma \cdot (p+k-k')\gamma \cdot (p-k') - 8m^4].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{III} &= \mathrm{Tr}[\gamma \cdot (p+k-k') + m](-2\gamma \cdot p)[4(p-k')\cdot(p+k) - 2m\gamma \cdot (p-k')] \\
&\quad + \mathrm{Tr}[\gamma \cdot (p+k-k') + m]4m[\gamma \cdot (p+k) + m]\gamma \cdot (2p-k')
\end{aligned}$$

$$+\mathrm{Tr}[\gamma\cdot(p+k-k')+m](-2m^2)[4m-2\gamma\cdot(p+k)]$$
$$=\mathrm{Tr}[-8(p-k')\cdot(p+k)\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot p+4m^2(\gamma\cdot p)\gamma\cdot(p-k')]$$
$$+\mathrm{Tr}4m^2\gamma\cdot(2p+2k-k')\gamma\cdot(2p-k')$$
$$+\mathrm{Tr}[4m^2\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p+k)-8m^4].$$
$$\mathrm{IV}=\mathrm{Tr}[4m\gamma\cdot(p-k')-2(\gamma\cdot p')\gamma\cdot(p-k')-2m\gamma\cdot p'+4m^2]$$
$$\times[4m\gamma\cdot(p-k')-2(\gamma\cdot p)\gamma\cdot(p-k')-2m\gamma\cdot p+4m^2]$$
$$=\mathrm{Tr}[4m^2-2\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p-k')-2m\gamma\cdot(k+k'-p)]$$
$$\times[4m^2-2(\gamma\cdot p)\gamma\cdot(p-k')+2m\gamma\cdot(p-2k')]$$
$$=\mathrm{Tr}[16m^4-8m^2\gamma\cdot(2p+k-k')\gamma\cdot(p-k')+4m^2\gamma\cdot(p-k-k')\gamma\cdot(p-2k')$$
$$+4\gamma\cdot(p+k-k')\gamma\cdot(p-k')(\gamma\cdot p)\gamma\cdot(p-k')].$$

上式中的各项都是偶数个γ矩阵的乘积,利用γ矩阵的求迹定理Ⅱ,即(1.55)式知

$$\mathrm{Tr}I=4,$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu)=4g_{\mu\nu},$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\rho)=4(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}-g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}+g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}),$$

则

$$\mathrm{Tr}(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)=4a\cdot b,$$
$$\mathrm{Tr}(a\cdot\gamma)(b\cdot\gamma)(c\cdot\gamma)(d\cdot\gamma)=4[(a\cdot b)(c\cdot d)-(a\cdot c)(b\cdot d)+(a\cdot d)(b\cdot c)], \tag{5.26}$$

这样

$$\mathrm{I}=64m^4+16[2(p+k-k')\cdot(p+k)p\cdot(p+k)-p\cdot(p+k-k')(p+k)^2]$$
$$-32m^2(2p+k-k')\cdot(p+k)+16m^2(p+k+k')\cdot(p+2k).$$
$$\mathrm{II}=-32(p+k)\cdot(p-k')(p+k-k')\cdot p+16m^2p\cdot(p+k)$$
$$+16m^2(2p+k-2k')\cdot(2p+k)+16m^2(p+k-k')\cdot(p-k')-32m^4.$$
$$\mathrm{III}=-32(p-k')\cdot(p+k)(p+k-k')\cdot p+16m^2p\cdot(p-k')$$
$$+16m^2(2p+2k-k')\cdot(2p-k')+16m^2(p+k-k')\cdot(p+k)-32m^4.$$
$$\mathrm{IV}=64m^4-32m^2(2p+k-k')\cdot(p-k')+16m^2(p-k-k')\cdot(p-2k')$$
$$+16[2(p+k-k')\cdot(p-k')p\cdot(p-k')-p\cdot(p+k-k')(p-k')^2].$$

注意到

$$p^2=m^2,\quad k^2=0,\quad k'^2=0, \tag{5.27}$$

将四维动量的标积算出,得

$$\mathrm{I}=64m^4+32[(p+k)^2-k'\cdot(p+k)](p^2+p\cdot k)$$
$$-16(p^2+p\cdot k-p\cdot k')(p^2+2p\cdot k)$$
$$-32m^2[(2p+k)\cdot(p+k)-p\cdot k'-k\cdot k']$$
$$+16m^2[(p+k)\cdot(p+2k)+k'\cdot p+2k'\cdot k]$$
$$=64m^4+32(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k)$$

$$-16(m^2+p\cdot k-p\cdot k')(m^2+2p\cdot k)$$
$$-32m^2(2m^2+3p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')$$
$$+16m^2(m^2+3p\cdot k+p\cdot k'+2k\cdot k')$$
$$=64m^4+32[m^4+3m^2(p\cdot k)+2(p\cdot k)^2-m^2(p\cdot k')-(p\cdot k)(p\cdot k')$$
$$-(p\cdot k)(k\cdot k')-m^2(k\cdot k')]-16[m^4+3m^2(p\cdot k)+2(p\cdot k)^2-m^2(p\cdot k')$$
$$-2(p\cdot k)(p\cdot k')]-32m^2(2m^2+3p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')$$
$$+16m^2(m^2+3p\cdot k+p\cdot k'+2k\cdot k')$$
$$=32m^4+32m^2(p\cdot k')+32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k)(k\cdot k')+32m^2k\cdot k'.$$

$$\text{Ⅱ}=-32[(p+k)\cdot p-(p+k)\cdot k'](p^2+p\cdot k-p\cdot k')+16m^2(p^2+p\cdot k)$$
$$+16m^2[(2p+k)^2-2k'\cdot(2p+k)]+16m^2(p^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')-32m^4$$
$$=-32(m^2+p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k-p\cdot k')+16m^2(m^2+p\cdot k)$$
$$+16m^2(4m^2+4p\cdot k-4p\cdot k'-2k\cdot k')+16m^2(m^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')$$
$$-32m^4$$
$$=-32[m^4+2m^2p\cdot k+(p\cdot k)^2-2m^2p\cdot k'-2(p\cdot k)(p\cdot k')$$
$$+(p\cdot k')^2-m^2k\cdot k'-(p\cdot k)(k\cdot k')+(p\cdot k')(k\cdot k')]+16m^2(m^2+p\cdot k)$$
$$+32m^2(2m^2+2p\cdot k-2p\cdot k'-k\cdot k')+16m^2(m^2-2p\cdot k'+p\cdot k-k\cdot k')$$
$$-32m^4$$
$$=32m^4+32m^2p\cdot k-32m^2p\cdot k'-16m^2k\cdot k'-32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2$$
$$+64(p\cdot k)(p\cdot k')+32(p\cdot k)(k\cdot k')-32(p\cdot k')(k\cdot k').$$

$$\text{Ⅲ}=-32(p^2+p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(p^2+p\cdot k-p\cdot k')+16m^2(p^2-p\cdot k')$$
$$+16m^2(4p^2+4p\cdot k-4p\cdot k'-2k\cdot k')+16m^2(p^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')$$
$$-32m^4$$
$$=-32(m^2+p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')(m^2+p\cdot k-p\cdot k')+16m^2(m^2-p\cdot k')$$
$$+16m^2(4m^2+4p\cdot k-4p\cdot k'-2k\cdot k')+16m^2(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')$$
$$-32m^4$$
$$=-32[m^4+2m^2p\cdot k-2m^2p\cdot k'+(p\cdot k)^2+(p\cdot k')^2-2(p\cdot k)(p\cdot k')$$
$$-m^2k\cdot k'-(p\cdot k)(k\cdot k')+(p\cdot k')(k\cdot k')]+16m^2(m^2-p\cdot k')$$
$$+16m^2(4m^2-4p\cdot k'+4p\cdot k-2k\cdot k')+16m^2(m^2+2p\cdot k-p\cdot k'-k\cdot k')$$
$$-32m^4$$
$$=32m^4+32m^2(p\cdot k)-32m^2(p\cdot k')-16m^2(k\cdot k')-32(p\cdot k)^2-32(p\cdot k')^2$$
$$+64(p\cdot k)(p\cdot k')+32(p\cdot k)(k\cdot k')-32(p\cdot k')(k\cdot k').$$

$$\text{Ⅳ}=64m^4-32m^2[(2p-k')\cdot(p-k')+k\cdot(p-k')]$$
$$+16m^2[(p-k')\cdot(p-2k')-k\cdot(p-2k')]$$
$$+32[p^2-2p\cdot k'+k\cdot(p-k')](p^2-p\cdot k')$$
$$-16(p^2+p\cdot k-p\cdot k')(p^2-2p\cdot k')$$

$$
\begin{aligned}
&= 64m^4 - 32m^2(2m^2 - 3p\cdot k' + p\cdot k - k\cdot k') \\
&\quad + 16m^2(m^2 - 3p\cdot k' - p\cdot k + 2k\cdot k') \\
&\quad + 32(m^2 - 2p\cdot k' + p\cdot k - k\cdot k')(m^2 - p\cdot k') \\
&\quad - 16(m^2 + p\cdot k - p\cdot k')(m^2 - 2p\cdot k') \\
&= 64m^4 - 32m^2(2m^2 - 3p\cdot k' + p\cdot k - k\cdot k') \\
&\quad + 16m^2(m^2 - 3p\cdot k' - p\cdot k + 2k\cdot k') + 32[m^4 - 3m^2 p\cdot k' \\
&\quad + 2(p\cdot k')^2 + m^2 p\cdot k - (p\cdot k)(p\cdot k') - m^2 k\cdot k' + (p\cdot k')(k\cdot k')] \\
&\quad - 16[m^4 - 3m^2(p\cdot k') + 2(p\cdot k')^2 + m^2(p\cdot k) - 2(p\cdot k)(p\cdot k')] \\
&= 32m^4 - 32m^2 p\cdot k + 32m^2 k\cdot k' + 32(p\cdot k')^2 + 32(p\cdot k')(k\cdot k').
\end{aligned}
$$

其中,包含 $k\cdot k'$ 的项可变为

$$k\cdot k' = k\cdot(p + k - p') = p\cdot k - p'\cdot k.$$

又

$$
\begin{aligned}
p + k = p' + k',\ &\Rightarrow\ p - k' = p' - k, \\
&\Rightarrow\ (p - k')^2 = p^2 - 2p\cdot k' = (p' - k)^2 = p'^2 - 2p'\cdot k, \\
&\Rightarrow\ p\cdot k' = p'\cdot k.
\end{aligned}
$$

所以

$$k\cdot k' = p\cdot k - p\cdot k', \tag{5.28}$$

则前面所得结果可化简为

$$
\begin{aligned}
\text{I} &= 32m^4 + 32m^2(p\cdot k') + 32(p\cdot k)^2 - 32(p\cdot k)(p\cdot k - p\cdot k') + 32m^2(p\cdot k - p\cdot k') \\
&= 32m^4 + 32m^2(p\cdot k) + 32(p\cdot k)(p\cdot k').
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{II} &= 32m^4 + 32m^2 p\cdot k - 32m^2 p\cdot k' - 16m^2(p\cdot k - p\cdot k') - 32(p\cdot k)^2 - 32(p\cdot k')^2 \\
&\quad + 64(p\cdot k)(p\cdot k') + 32(p\cdot k)(p\cdot k - p\cdot k') - 32(p\cdot k')(p\cdot k - p\cdot k') \\
&= 32m^4 + 16m^2 p\cdot k - 16m^2 p\cdot k'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III} &= 32m^4 + 32m^2(p\cdot k) - 32m^2(p\cdot k') - 16m^2(p\cdot k - p\cdot k') - 32(p\cdot k)^2 - 32(p\cdot k')^2 \\
&\quad + 64(p\cdot k)(p\cdot k') + 32(p\cdot k)(p\cdot k - p\cdot k') - 32(p\cdot k')(p\cdot k - p\cdot k') \\
&= 32m^4 + 16m^2 p\cdot k - 16m^2 p\cdot k'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{IV} &= 32m^4 - 32m^2 p\cdot k + 32m^2(p\cdot k - p\cdot k') + 32(p\cdot k')^2 + 32(p\cdot k')(p\cdot k - p\cdot k') \\
&= 32m^4 - 32m^2 p\cdot k' + 32(p\cdot k)(p\cdot k').
\end{aligned}
$$

将以上得到的Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳ代入(5.23)式得

$$
\begin{aligned}
\bar{\sum}|T_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{64m^2}\Bigg[\frac{32m^4 + 32m^2(p\cdot k) + 32(p\cdot k)(p\cdot k')}{(p\cdot k)(p\cdot k)} - \frac{32m^4 + 16m^2 p\cdot k - 16m^2 p\cdot k'}{(p\cdot k)(p\cdot k')} \\
&\quad - \frac{32m^4 + 16m^2 p\cdot k - 16m^2 p\cdot k'}{(p\cdot k)(p\cdot k')} + \frac{32m^4 - 32m^2 p\cdot k' + 32(p\cdot k)(p\cdot k')}{(p\cdot k')(p\cdot k')}\Bigg] \\
&= \frac{e^4}{2}\Bigg[\frac{m^2}{(p\cdot k)^2} + \frac{1}{p\cdot k} + \frac{p\cdot k'}{m^2 p\cdot k} - \frac{m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')} - \frac{1}{2(p\cdot k')} + \frac{1}{2(p\cdot k)}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{1}{2(p\cdot k')}+\frac{1}{2(p\cdot k)}+\frac{m^2}{(p\cdot k')^2}-\frac{1}{p\cdot k'}+\frac{p\cdot k}{m^2 p\cdot k'}\Bigg]$$

$$=\frac{e^4}{2}\left[\frac{m^2}{(p\cdot k)^2}+\frac{2}{p\cdot k}+\frac{p\cdot k'}{m^2 p\cdot k}-\frac{2m^2}{(p\cdot k)(p\cdot k')}-\frac{2}{p\cdot k'}+\frac{m^2}{(p\cdot k')^2}+\frac{p\cdot k}{m^2 p\cdot k'}\right].$$

在实验室坐标系中，$p=(m,0)$，$p\cdot k=m\omega$，$p\cdot k'=m\omega'$，则上式成为

$$\bar{\sum}|T_{fi}|^2=\frac{e^4}{2}\left[\frac{1}{\omega^2}+\frac{2}{m\omega}+\frac{\omega'}{m^2\omega}-\frac{2}{\omega\omega'}-\frac{2}{m\omega'}+\frac{1}{\omega'^2}+\frac{\omega}{m^2\omega'}\right]$$

$$=\frac{e^4}{2}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega'}\right)^2+\frac{e^4}{m}\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega'}\right)+\frac{e^4}{2m^2}\left(\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\omega}{\omega'}\right).\tag{5.29}$$

将(5.29)代入(5.17)式得

$$\sigma=\int\frac{e^4\ (2\pi)^4\delta^4(p+k-p'-k')}{8mE'\omega\omega'}\left[\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)^2+2\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)+\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}\right]\frac{\mathrm{d}^3p'\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^6}.\tag{5.30}$$

5.2.4 散射光子频率与散射角的关系

为了完成(5.30)式的积分，先对上式中的变量 ω' 作变量代换. 为此，采用实验室坐标系，在该坐标系中，由能量-动量守恒知

$$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{k}',\quad m+\omega=E'+\omega',\quad E'=\sqrt{\boldsymbol{p}'^2+m^2}=\sqrt{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2+m^2},\tag{5.31}$$

由此可推知

$$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2+m^2=(m+\omega-\omega')^2,$$

亦即

$$|\boldsymbol{k}|^2+|\boldsymbol{k}'|^2-2|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'|+m^2=m^2+(\omega-\omega')^2+2m(\omega-\omega')$$

$$\Rightarrow\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta+m^2=m^2+\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'+2m\omega-2m\omega',$$

其中，θ 为入射光子(动量为 $\boldsymbol{k}$)与出射光子(动量为 $\boldsymbol{k}'$)动量方向之间的夹角，称为散射角. 这样

$$m\omega'+\omega\omega'-\omega\omega'\cos\theta=m\omega,$$

亦即

$$\frac{\omega'}{\omega}=\frac{m}{m+\omega-\omega\cos\theta},\tag{5.32a}$$

或

$$\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}=-1+\cos\theta,\tag{5.32b}$$

或者

$$\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)^2+2\left(\frac{m}{\omega}-\frac{m}{\omega'}\right)=-\sin^2\theta,\tag{5.32c}$$

或者

$$\frac{1}{\omega'}-\frac{1}{\omega}=\frac{2}{m}\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{5.32d}$$

上式即为我们熟知的散射光子的频率与散射角之间的关系式，表明频率为 ω 的入射光子，经电子散射后，其频率 ω' 将发生变化，变化的程度与散射角 θ 有关，在 $\theta=0$ 的方向上，$\omega'=\omega$，频率不变，在 $\theta\neq0$ 的方向上，$\omega'<\omega$，且随着散射角 θ 的增加，ω' 是减小的.

5.2.5　终态积分

将(5.32c)代入(5.30)式并完成 d^3p' 的积分，消掉三维 δ 函数 $\delta^3(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{k}')$，得

$$\sigma=\frac{\alpha^2}{2m}\int\frac{\delta(E+\omega-E'-\omega')}{E'\omega\omega'}\left[\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right]\mathrm{d}^3k'\ . \tag{5.33}$$

为了进一步完成对 d^3k' 的积分，采用球坐标系，在该坐标系中，极轴取做入射光子的动量方向，这样散射角就成为极角. 又

$$\mathrm{d}^3k'=|\boldsymbol{k}'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|\mathrm{d}\Omega=\omega'^2\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|}{\mathrm{d}E_f}\mathrm{d}E_f\mathrm{d}\Omega, \tag{5.34a}$$

而

$$E_f=E'+\omega'\overset{(5.31)\text{式}}{=\!=\!=}\sqrt{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|+m^2}+|\boldsymbol{k}'|,$$

则

$$\mathrm{d}E_f=\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|+\frac{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|\mathrm{d}|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|}{\sqrt{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|^2+m^2}}=\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|+\frac{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|\mathrm{d}|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|}{E'}.$$

另

$$|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|=\sqrt{\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta},$$

则

$$\mathrm{d}|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|=\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{\sqrt{\omega^2+\omega'^2-2\omega\omega'\cos\theta}}\mathrm{d}\omega'=\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'|}\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|,$$

因此

$$\mathrm{d}E_f=\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|.$$

这样

$$\frac{\mathrm{d}E_f}{\mathrm{d}|\boldsymbol{k}'|}=1+\frac{\omega'-\omega\cos\theta}{E'}=\frac{E'+\omega'-\omega\cos\theta}{E'}$$

$$\overset{(5.31)\text{式}}{=\!=\!=}\frac{m+\omega-\omega\cos\theta}{E'}\overset{(5.32\text{a})\text{式}}{=\!=\!=}\frac{m\omega}{E'\omega'}.$$

代入(5.34a)式得

$$d^3k'=\frac{E'\omega'^3}{m\omega}dE_f d\Omega. \tag{5.34b}$$

将(5.34b)代入(5.33)式，完成 dE'_f 的积分，消掉该式中的一维 δ 函数 $\delta(E+\omega-E'-\omega')=\delta(E+\omega-E'_f)$，得

$$\sigma=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right)d\Omega\ , \tag{5.35a}$$

或写成微分形式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\alpha^2}{2m^2}\frac{\omega'^2}{\omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega'}+\frac{\omega'}{\omega}-\sin^2\theta\right). \tag{5.35b}$$

上式即为光子经电子作康普顿散射时的散射截面与入射光子的频率 ω 及散射角 θ 之间的关系，其中的 ω' 与 ω 及 θ 的关系由(5.32)式给出. 一般来说，由于 ω' 与 θ 关系的复杂性，(5.35a)式的积分很难算出，但对于低能光子的情况下，$\omega'\simeq\omega$，即此时散射与入射光子的频率近似相等，(5.35a)式将变得很简单，为

$$\sigma=\frac{\alpha^2}{2m^2}\int(2-\sin^2\theta)\,d\Omega=\frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m^2}. \tag{5.36}$$

这就是人们熟知的经典电磁散射的汤姆孙(Thomson)公式.

5.3　电子在库仑场中的散射

前两节讨论的都是纯量子的问题，其中的费米子场与电磁场都是量子化的. 在实际的问题中，也有半经典、半量子的情况. 如电子与原子核的碰撞过程，可看成是电子和原子核所产生的库仑外场的相互作用过程，其中的电子场是量子化的，而原子核的库仑外场是经典场，其散射过程可写成

$$e^-(p,s)+\otimes\rightarrow e^-(p',s')+\otimes, \tag{5.37}$$

其中的符号“$\otimes$”表示经典的库仑外场. 该过程是电磁的，相互作用的哈密顿密度函数为

$$\mathscr{H}_i(x)=-e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A_e^\mu(x), \tag{5.38}$$

其中 $\psi(x)$ 是量子化的电子场，$A_e^\mu(x)$ 是经典的原子核库仑外场. 上式与纯量子时的形式一致，区别仅在于将原来的量子电磁场换成了现在的经典库仑外场.

在电子场与库仑外场的相互作用中，库仑外场是不变的，所以过程(5.37)的初态与末态都只有一个电子，即

$$|i\rangle=c^\dagger(p,s)|0\rangle,\quad |f\rangle=c^\dagger(p',s')|0\rangle.$$

在最低级近似下，S 矩阵元为

$$S_{ee}=-ie\int d^4x\langle 0|c(p',s')\bar{\psi}^-(x)\gamma_\mu\psi^+(x)A_e^\mu(x)c^\dagger(p,s)|0\rangle,$$

$\psi^{+}(x)$的任务是消灭初态电子,$\bar{\psi}^{-}(x)$的任务是产生末态电子.改写上式得

$$
\begin{aligned}
S_{ee} &= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4 x\{c(p',s'),\ \bar{\psi}^{-}(x)\}\gamma_{\mu}\{\psi^{+}(x),\ c^{\dagger}(p,s)\}A_e^{\mu}(x) \\
&= -\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4 x \sqrt{\frac{m}{VE'}}\,\bar{u}(p',s')\mathrm{e}^{\mathrm{i}p'\cdot x}\gamma_{\mu}\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}A_e^{\mu}(x),
\end{aligned}
$$

或

$$
S_{ee} = \sqrt{\frac{m}{VE'}}\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e\gamma_{\mu})A_e^{\mu}(p-p')\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s), \tag{5.39}
$$

其中的

$$
A_e^{\mu}(p-p') = \int \mathrm{d}^4 x A_e^{\mu}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x} \tag{5.40}
$$

为 $A_e^{\mu}(x)$的傅里叶(Fourier)变换,$p-p'$为传递给原子核的动量,相应的费曼图如图 5.5 所示.

图 5.5　电子与经典库仑场相互作用的费曼图

将(5.39)式与纯量子情况下的(4.88)式相比较知,顶角处的经典与量子电磁场有对应关系

$$
A_e^{\mu}(p-p') \Longleftrightarrow (2\pi)^4\delta^4(p-p'-k)\frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}.
$$

5.3.1　库仑场

在实验室坐标系中,原子核是静止的,假设其带电量为 Ze,则它所产生的库仑场的四维势矢量为

$$
A_e^{\mu}(x) = g^{\mu 0}\frac{Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|}, \tag{5.41}
$$

即此时 $A_e^{\mu}(x)$只有时间分量——标势,空间部分的矢势为零.这样

$$
\begin{aligned}
A_e^{\mu}(p-p') &= \int \mathrm{d}^4 x A_e^{\mu}(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x} \\
&= \frac{g^{\mu 0}Ze}{4\pi}\int \mathrm{d}^4 x\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(p-p')\cdot x}}{|\boldsymbol{x}|} \\
&= \frac{g^{\mu 0}Ze}{4\pi}\int \mathrm{d}x_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E-E')x_0}\int \mathrm{d}^3 x\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{x}|} \\
&= \frac{1}{2}g^{\mu 0}Ze\delta(E-E')\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|\cos\theta}|\boldsymbol{x}|\,\mathrm{d}|\boldsymbol{x}|\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}
$$

而

$$\begin{aligned}\int e^{i|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|\cos\theta}|\boldsymbol{x}|d|\boldsymbol{x}|\sin\theta d\theta d\phi &= -2\pi\int e^{i|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|\cos\theta}d\cos\theta|\boldsymbol{x}|d|\boldsymbol{x}| \\ &= -2\pi\int\left(\frac{1}{i|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|}e^{i|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|\cos\theta}\right)\Big|_0^{\pi}|\boldsymbol{x}|d|\boldsymbol{x}| \\ &= 4\pi\int_0^{\infty}\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|}\sin(|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|)d|\boldsymbol{x}| \\ &= -4\pi\frac{1}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}\cos|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|\Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{4\pi}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}.\end{aligned}$$

上式最后一步用到了周期性边界条件，

$$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}\cos|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'||\boldsymbol{x}|=0,$$

这样

$$A_e^{\mu}(p-p')=2\pi\delta(E-E')\frac{g^{\mu 0}Ze}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}. \tag{5.42}$$

将(5.42)代入(5.39)式得

$$S_{ee}=-i2\pi\delta(E-E')\frac{Ze^2}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}\sqrt{\frac{m}{VE'}}\bar{u}(p',s')\gamma_0\sqrt{\frac{m}{VE}}u(p,s). \tag{5.43}$$

5.3.2 散射截面

在原子核静止的实验室坐标系中,电子的入射流密度为

$$J=\rho|\boldsymbol{v}_r|=\frac{1}{V}\frac{|\boldsymbol{p}|}{E}. \tag{5.44}$$

由(4.124)式知,该过程的散射截面为

$$\begin{aligned}\sigma &= \int\frac{\bar{\sum}|S_{ee}|^2}{TJ}\frac{Vd^3p'}{(2\pi)^3} \\ &= \int\frac{1}{T}(2\pi)^2\delta^2(E-E')\frac{Z^2e^4m^2}{E'|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^4}\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0u(p,s)|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}.\end{aligned}$$

由于

$$2\pi\delta(E-E')=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}\exp[-i(E-E')t]dt,$$

故

$$[2\pi\delta(E-E')]^2=2\pi\delta(E-E')2\pi\delta(0)=2\pi\delta(E-E')T,$$

所以

$$\sigma=\int 2\pi\delta(E-E')\frac{Z^2e^4m^2}{E'|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^4}\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0u(p,s)|^2\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}. \tag{5.45}$$

5.3.3　自旋的平均与求和

考虑到电子的自旋只有两个取向,所以

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2 &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_{s'}\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma_0 u(p',s') \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\sum_s\sum_{s'}u(p',s')\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)\bar{u}(p,s)\gamma_0 \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\frac{\gamma\cdot p'+m}{2m}\gamma_0\,\frac{\gamma\cdot p+m}{2m}\gamma_0 \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p'\gamma_0\gamma\cdot p\gamma_0+m^2) \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha p'^\alpha\gamma_0\gamma_\beta p^\beta\gamma_0+m^2) \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_0\gamma_\beta\gamma_0 p'^\alpha p^\beta+m^2) \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}[\gamma_\alpha\gamma_0(2g_{\beta 0}-\gamma_0\gamma_\beta)p'^\alpha p^\beta+m^2] \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}[2\gamma_\alpha\gamma_0 p'^\alpha p_0-\gamma_\alpha\gamma_\beta p'^\alpha p^\beta+m^2] \\ &= \frac{1}{8m^2}\mathrm{Tr}[2(\gamma\cdot p')\gamma_0 p_0-(\gamma\cdot p')(\gamma\cdot p)+m^2].\end{aligned}$$

注意到 γ 矩阵的求迹定理Ⅱ,或(5.26)式

$$\mathrm{Tr}(\gamma\cdot a)(\gamma\cdot b)=4a\cdot b,$$

则

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2 &= \frac{1}{2m^2}(2EE'-p\cdot p'+m^2) \\ &= \frac{1}{2m^2}[2EE'-(EE'-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')+E^2-\boldsymbol{p}^2] \\ &= \frac{1}{2m^2}(EE'+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'+E^2-\boldsymbol{p}^2).\end{aligned}$$

由(5.45)式中的 δ 函数知,该过程的能量守恒,即

$$E=E',\ \Rightarrow\ |\boldsymbol{p}|=|\boldsymbol{p}'|, \tag{5.46}$$

但散射后的电子其动量方向将发生改变.注意到 $\boldsymbol{p}=E\boldsymbol{v}$,则

$$\begin{aligned}\bar{\sum}|\bar{u}(p',s')\gamma_0 u(p,s)|^2 &= \frac{E^2}{m^2}\left[1-\frac{v^2}{2}(1-\cos\theta)\right] \\ &= \frac{E^2}{m^2}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right).\end{aligned}$$

其中的 θ 是 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}'$ 之间的夹角,即为电子的散射角.这样,(5.45)式变为

$$\sigma = \int 2\pi\delta(E - E')\frac{Z^2 e^4}{v|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'|^4}\left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\frac{\mathrm{d}^3 p'}{(2\pi)^3}. \tag{5.47}$$

5.3.4 终态积分

由能量守恒(5.46)式

$$|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^4=(2|\boldsymbol{p}|^2-2|\boldsymbol{p}|^2\cos\theta)^2=4|\boldsymbol{p}|^4(1-\cos\theta)^2=16|\boldsymbol{p}|^4\sin^4\frac{\theta}{2}, \tag{5.48}$$

采用球坐标系，且取极轴沿入射电子的方向，则散射角成为极角. 这样

$$\mathrm{d}^3 p'=|\boldsymbol{p}'|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}\Omega,$$

又

$$E'=\sqrt{|\boldsymbol{p}'|^2+m^2},$$

故

$$\mathrm{d}E'=\frac{|\boldsymbol{p}'|\mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|}{\sqrt{|\boldsymbol{p}'|^2+m^2}} \Rightarrow \mathrm{d}|\boldsymbol{p}'|=\frac{E'\mathrm{d}E'}{|\boldsymbol{p}'|},$$

故

$$\mathrm{d}^3 p'=|\boldsymbol{p}'|E'\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega. \tag{5.49}$$

将(5.49)与(5.48)代入(5.47)式得

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4v^2|\boldsymbol{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\left(1-v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right). \tag{5.50}$$

这就是莫特(Mott)在1929年得到的结果，称为莫特截面，在低速情况下，$v \Rightarrow 0$，上式变为

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{Z^2\alpha^2}{4v^2|\boldsymbol{p}|^2\sin^4\frac{\theta}{2}}. \tag{5.51}$$

这就是原子物理中我们熟知的卢瑟福(Rutherford)公式，是1911年卢瑟福为解释原子的有核结构时提出的，由上面的讨论知，它其实是莫特公式(5.50)在非相对论情况下的近似.

第 6 章　单圈近似与重整化

第 5 章讨论了树图近似下粒子的碰撞截面,从那里的讨论可以看出,量子场论的微扰理论在处理这方面的问题是很成功的. 但树图近似是微扰理论中的最低级近似,所能处理的问题是很有限的,为了得到问题更精确的解,需要考虑高阶近似. 单圈近似(包含一个圈图,如电子自能或真空极化等的费曼图),从理论上讲,比树图近似更高了一级,是对树图近似的一级修正. 但计算表明,与圈图相应的 S 矩阵元总是发散的,使得结果变得没意义,这曾导致量子场论的发展一度停顿了下来. 后来,人们找到了克服这一困难的方法——重整化方法,从而救活了量子场论,使其发展成为目前最精确的理论之一. 重整化方法包括两个步骤:正规化和重整化. 所谓正规化就是把发散积分做成某种有限积分的极限,并将极限情况下的发散部分和有限部分分离开来. 而重整化就是将分离出来的发散部分归并于质量、耦合常数和场量,即用重新定义的质量、耦合常数和场量的方法,藉以消去发散项. 这一章,我们将以单圈近似为例,介绍重整化方法.

6.1　费米子自能与质量重整化

如前面 4.4 节所述,费米子自能是指费米子不断发射光子并随即吸收的过程. 费米子有虚粒子与实粒子之分,它们分别对应于费曼图中的内线与外线,在最低级近似下,它们分别是

$\Rightarrow$ 费米子内线或费米子传播子,

或 $\Rightarrow$ 费米子外线.

考虑到高阶近似时,就会出现圈图,如

$\Rightarrow$ 含有单圈的费米子内线,

$\Rightarrow$ 含有单圈的费米子外线.

当然还有更高阶的多圈图,它们统称为费米子自能图.

6.1.1　费米子自能部分

费米子自能部分,指的是单圈近似下的费米子内线或外线,截掉其外腿后剩下的

圈图,如图 6.1 所示.按照费曼规则,相应的 S 矩阵元为

$$-\mathrm{i}\Sigma(p)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu),\quad(6.1)$$

上式中,左边的 $-\mathrm{i}\Sigma(p)$ 是表示费米子自能部分的符号,右边的分子 $\propto k^4$,分母 $\propto k^3$,所以当积分取极限 $\Rightarrow\infty$ 时,积分是线性发散的.由于 $k=2\pi/\lambda$,当 $k\Rightarrow\infty$ 时,$\lambda\Rightarrow 0$,所以通常称这种发散为紫外发散.式中的 η,作为光子的静止质量,是为了积分在 $k^2\Rightarrow 0$ 时不发散而引入的.当然实际上应为零,所以在最后的计算结果中,须令 $\eta\Rightarrow 0$.

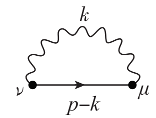


图 6.1　费米子自能部分

对(6.1)式稍作整理得

$$\Sigma(p)=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma^\mu}{(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}.\quad(6.2)$$

由 γ 矩阵的夹积定理,即(1.57)式知

$$\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma^\mu=4m-2\gamma\cdot(p-k),$$

(6.2)式变为

$$\Sigma(p)=\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{2\gamma\cdot(p-k)-4m}{(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}.\quad(6.3)$$

6.1.2　分母的积化和

在(6.3)式中,被积函数的分母是以两因子乘积的形式出现的,对积分不便,为此需将其化成因子和的形式,这种化法有多种方案,这里采用如下关系

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}&=-\mathrm{i}\int_0^\infty\mathrm{d}z_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)},\\ \frac{1}{(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}&=-\mathrm{i}\int_0^\infty\mathrm{d}z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_2[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]},\end{aligned}\quad(6.4)$$

得

$$\Sigma(p)=\mathrm{i}e^2\int_0^\infty\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}[4m-2\gamma\cdot(p-k)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}z_1(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)+\mathrm{i}z_2[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}.$$

(6.5)

6.1.3 高斯积分

(6.5)式是高斯型积分. 指数上的变量 k 既有平方项也有线性项, 对其作简单的配方处理, 可化成只有平方的形式, 为此展开指数上的函数

$$\begin{aligned}&z_1k^2-z_1\eta^2+\mathrm{i}z_1\varepsilon+z_2(p^2+k^2-2p\cdot k-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)\\=&(z_1+z_2)k^2-2z_2p\cdot k-z_1\eta^2-z_2m^2+z_2p^2+\mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon\\=&(z_1+z_2)\left(k-\frac{z_2p}{z_1+z_2}\right)^2+\frac{z_1z_2p^2}{z_1+z_2}-z_1\eta^2-z_2m^2+\mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon,\end{aligned}$$

令

$$l=k-\frac{z_2p}{z_1+z_2},$$

则(6.5)式变为

$$\Sigma(p)=\mathrm{i}e^2\int_0^\infty\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\left[4m-2\gamma\cdot\left(\frac{z_1p}{z_1+z_2}-l\right)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(z_1+z_2)l^2+\frac{z_1z_2p^2}{z_1+z_2}-z_1\eta^2-z_2m^2+\mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon\right]},\tag{6.6}$$

由于对 l 各分量的积分由 $-\infty\Rightarrow\infty$, 式中含 l 的线性项是奇函数, 积分为零, 有贡献的只有偶函数部分

$$\Sigma(p)=\mathrm{i}e^2\int_0^\infty\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2\left(4m-\frac{2z_1}{z_1+z_2}\gamma\cdot p\right)\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[(z_1+z_2)l^2+\frac{z_1z_2}{z_1+z_2}p^2-z_1\eta^2-z_2m^2+\mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon\right]}.\tag{6.7}$$

人们熟悉的高斯型积分的一般形式是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\tag{6.8}$$

其中, α 为正的实数. 对于被积函数为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}by^2}$ 的情况, 作代换

$$\mathrm{i}by^2=-x^2,$$

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{-\mathrm{i}b}\frac{x}{y}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}b}}\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\mathrm{e}^{\mathrm{i}by^2}=\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}b}}\int_{-\sqrt{-\mathrm{i}b}\infty}^{\sqrt{-\mathrm{i}b}\infty}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}b}}\int_{-\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}^{\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}\mathrm{d}x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

如图 6.2 所示, 积分是在复平面 z 上沿着与实轴成 $-45°$ 角的直线 x 进行的. 由于被积函数 e^{-x^2} 是解析的, 且在无穷远处 $\mathrm{e}^{-x^2}\Rightarrow0$, 所以积分与路径无关. 这样, 沿图中直线 x 的积分与沿实轴的积分是相等的, 也就是说, 若将积分直线沿逆时针方向旋转 45°, 结果不变. 因此有

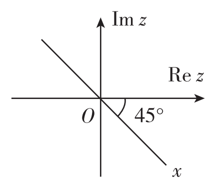


图 6.2　积分复平面 z 上的积分直线 x

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \mathrm{e}^{\mathrm{i}by^2} = \frac{1}{\sqrt{-\mathrm{i}b}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{-\mathrm{i}b}}. \tag{6.9}$$

这样

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}^4 l \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)l^2} &= \int \mathrm{d}l_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(z_1+z_2)l_0^2} \int \mathrm{d}l_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)l_1^2} \int \mathrm{d}l_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)l_2^2} \int \mathrm{d}l_3 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(z_1+z_2)l_3^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{-\mathrm{i}(z_1+z_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{i}(z_1+z_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{i}(z_1+z_2)}} \sqrt{\frac{\pi}{\mathrm{i}(z_1+z_2)}} \\ &= -\mathrm{i} \left(\frac{\pi}{z_1+z_2} \right)^2, \end{aligned}$$

将其代入(6.7)式得

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2}{(z_1+z_2)^2} \left(2m - \frac{z_1}{z_1+z_2} \gamma \cdot p \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} p^2 - z_1 \eta^2 - z_2 m^2 + \mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon \right]}. \tag{6.10}$$

6.1.4　发散积分变量变换

(6.10)式被积函数中的变量 z_1 与 z_2，既有积的形式，又有分数形式，还有和的形式，交缠在一起，使得积分很不方便. 为了改善这一点，利用公式

$$\int_0^{\infty} \delta(\alpha - z_1 - z_2) \mathrm{d}\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\alpha} \right) = 1, \tag{6.11}$$

将其代入(6.10)式得

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2}{(z_1+z_2)^2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \delta\left(1 - \frac{z_1+z_2}{\alpha} \right) \left(2m - \frac{z_1}{z_1+z_2} \gamma \cdot p \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} p^2 - z_1 \eta^2 - z_2 m^2 + \mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon \right]}.$$

对 z_1、z_2 作变换

$$z_1 \Rightarrow \alpha z_1, \quad z_2 \Rightarrow \alpha z_2,$$

上式变为

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_2}{(z_1+z_2)^2} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \delta(1 - z_1 - z_2) \left(2m - \frac{z_1}{z_1+z_2} \gamma \cdot p \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\left[\frac{z_1 z_2}{z_1+z_2} p^2 - z_1 \eta^2 - z_2 m^2 + \mathrm{i}(z_1+z_2)\varepsilon \right]}.$$

完成对 z_1 的积分，并令 $z_2 = z$，得

$$\Sigma(p) = \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}z \left[2m - (1-z)\gamma \cdot p \right] \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\left[z(1-z)p^2 - (1-z)\eta^2 - zm^2 + \mathrm{i}\varepsilon \right]}. \tag{6.12}$$

注意：由于 $\delta(1-z_1-z_2)$ 函数的存在，z_1 与 z_2 的积分限都变为 $0\Rightarrow 1$.

(6.12)式对 α 的积分是发散的. 而实际上，$\Sigma(p)$ 原来的发散积分是对 k 的，经过上述几个步骤的处理后，发散积分变量由 k 变成了 α，之所以要作这样的变换，是为了便于发散积分的处理.

6.1.5　泡利-威勒斯的正规子正规化法

在(6.3)式中作代换

$$\frac{1}{(p-k)^2-m^2}\Rightarrow\frac{1}{(p-k)^2-m^2}-\frac{1}{(p-k)^2-M^2},\tag{6.13}$$

得

$$\begin{aligned}\Sigma(p)&=ie^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{2\gamma\cdot(p-k)-4m}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}\left[\frac{1}{(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{(p-k)^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon}\right]\\&=ie^2\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{[2\gamma\cdot(p-k)-4m](m^2-M^2)}{(k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-k)^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon]},\end{aligned}\tag{6.14}$$

(6.14)式的分子 $\propto k^5$，分母 $\propto k^6$，当 M 取有限值时，积分是有限的，而当 $M^2\Rightarrow\infty$ 时，(6.14)又回到了发散积分(6.3)式，所以(6.3)式是有限积分(6.14)式的极限表达式，这正是正规化要做的事. (6.13)式的代换，如同引进了一个质量为 M 的费米子，其作用是使发散积分变得收敛，所以通常称该费米子为正规子，而称这种正规化方法为泡利-威勒斯(Pauli - Villars)正规子正规化法.

6.1.6　费米子自能部分的正规化

前面，通过发散变量 k 到 α 的变换，(6.3)变成(6.12)式，采用泡利-威勒斯正规化法，与该式相应的正规化形式为

$$\begin{aligned}\Sigma(p)=&\frac{e^2}{8\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}z[2m-(1-z)\gamma\cdot p]\\&\times\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\alpha}{\alpha}\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha[z(1-z)p^2-(1-z)\eta^2-zm^2+\mathrm{i}\varepsilon]}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha[z(1-z)p^2-(1-z)\eta^2-zM^2+\mathrm{i}\varepsilon]}\}.\end{aligned}\tag{6.15}$$

在 $M\Rightarrow\infty$ 之前这个积分是有限的. 利用公式

$$\int_0^\infty\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}}{x}=\ln\frac{b}{a},\tag{6.16}$$

(6.15)式变为

$$\Sigma(p)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1\mathrm{d}z[2m-(1-z)\gamma\cdot p]\ln\frac{zM^2+(1-z)\eta^2-z(1-z)p^2}{zm^2+(1-z)\eta^2-z(1-z)p^2}.\tag{6.17}$$

当 M 取有限值时，它是有限的，当 $M \Rightarrow \infty$时，它是对数发散的，是(6.3)式所示的费米子自能部分.

将(6.3)式所示的费米子自能部分的发散积分，变成了有限积分的极限，这是正规化的第一步，正规化的第二步就是要将在极限情况下的发散部分和有限部分分离开来，下面就来完成这一工作.

注意到$(\gamma \cdot p)^2 = p^2$，所以(6.17)式中的$\Sigma(p)$是$\gamma \cdot p$ 的函数. 将它在 $\gamma \cdot p = m$ 的邻域内作展开，第一项为

$$A = \Sigma(p)\big|_{\gamma \cdot p = m} \simeq \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z(1+z)m\ln\frac{zM^2}{z^2m^2}, \tag{6.18}$$

计算中，考虑到了条件 $M^2 \gg m^2$，且 $\eta \Rightarrow 0$. 这样

$$\begin{aligned}
A &\simeq \frac{m\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z(1+z)\left(\ln\frac{M^2}{m^2} - \ln z\right) \\
&= \frac{m\alpha}{2\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}\int_0^1 \mathrm{d}z(1+z) - \frac{m\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z(1+z)\ln z \\
&= \frac{3m\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2} + \frac{5m\alpha}{8\pi}.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

再对(6.17)式中的 $\gamma \cdot p$ 求导，并令 $\gamma \cdot p = m$，就可得展开式第二项的系数

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\partial\Sigma(p)}{\partial(\gamma \cdot p)}\bigg|_{\gamma \cdot p = m} \\
&= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z\left\{(z-1)\ln\frac{zM^2}{z^2m^2} + (1+z)m\left[\frac{2(z-1)m}{M^2} - \frac{2z(z-1)m}{z^2m^2+(1-z)\eta^2}\right]\right\} \\
&= -\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2} - \frac{3\alpha}{8\pi} + \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{z(1-z^2)m^2}{z^2m^2+(1-z)\eta^2},
\end{aligned} \tag{6.20}$$

(6.20)式最后一步用到了条件 $M \gg m$. 而余下的各项之和记为

$$\begin{aligned}
\Sigma_f(p) &= \Sigma(p) - A - (\gamma \cdot p - m)B \\
&= \Sigma(p) - [A + (\gamma \cdot p - m)B],
\end{aligned}$$

其中

$$\Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z[2m - (1-z)\gamma \cdot p]\ln\frac{zM^2 + (1-z)\eta^2 - z(1-z)p^2}{zm^2 + (1-z)\eta^2 - z(1-z)p^2},$$

$$A = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z(1+z)m\ln\frac{zM^2}{z^2m^2} \simeq \frac{3m\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2},$$

$$B \xlongequal{M \gg m} \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 \mathrm{d}z(z-1)\ln\frac{zM^2}{z^2m^2} \simeq -\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}.$$

则

$$A + (\gamma \cdot p - m)B = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[(1+z)m + (\gamma \cdot p - m)(z-1)]\ln\frac{zM^2}{z^2m^2}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m - (1-z)\gamma \cdot p]\ln\frac{zM^2}{z^2m^2}.$$

这样

$$\Sigma_f(p) = \Sigma(p) - [A + (\gamma \cdot p - m)B]$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m - (1-z)\gamma \cdot p]\ln\left(\frac{zM^2 + (1-z)\eta^2 - z(1-z)p^2}{zm^2 + (1-z)\eta^2 - z(1-z)p^2} \times \frac{z^2m^2}{zM^2}\right),$$

亦即

$$\Sigma_f(p) \xlongequal{M \gg m} \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz[2m - (1-z)\gamma \cdot p]\ln\frac{z^2m^2}{zm^2 + (1-z)\eta^2 - z(1-z)p^2}. \tag{6.21}$$

不含有 M，在极限 $M^2 \Rightarrow \infty$时是有限的. 这样

$$\Sigma(p) = A + B(\gamma \cdot p - m) + \Sigma_f(p), \tag{6.22}$$

其中，A 和 B 如(6.19)与(6.20)式所示，在 $M^2 \Rightarrow \infty$时是对数发散的. 而 $\Sigma_f(p)$，如(6.21)式所示是有限的，且由级数展开(6.22)式知：$\Sigma_f(p) \sim (\gamma \cdot p - m)^2$. 至此，我们完成了正规化的第二步，即将极限情况下的发散部分和有限部分分离了开来. 接下来的工作就是要将分离出来的发散部分吸收掉，这是重整化要做的事.

6.1.7　质量重整化与费米子场的重整化常数

费米子中的自能部分$-i\Sigma(p)$，出现在费米子的内线和外线中. 为了论述重整化的方法，下面计算链近似下的传播子，其费曼图如图 6.3 所示.

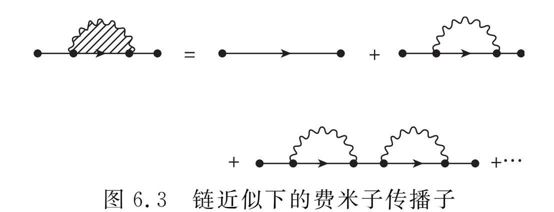


图 6.3　链近似下的费米子传播子

相应的 S 矩阵元为

$$iS_f^0(p) = iS_f(p) + iS_f(p)[-i\Sigma(p)]iS_f(p) + iS_f(p)[-i\Sigma(p)]iS_f(p)[-i\Sigma(p)]iS_f(p) + \cdots$$

$$= iS_f(p)\{1 + [-i\Sigma(p)]iS_f(p) + [-i\Sigma(p)]iS_f(p)[-i\Sigma(p)]iS_f(p) + \cdots\}.$$

利用级数公式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

得

$$iS_f^0(p)=iS_f(p)\frac{1}{1+i\Sigma(p)iS_f(p)},\tag{6.23}$$

将自由传播子

$$iS_f(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m}\tag{6.24}$$

与费米子自能部分的(6.22)式代入得

$$iS_f^0(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m-A-B(\gamma\cdot p-m)-\Sigma_f(p)}.\tag{6.25}$$

记

$$\Sigma_f(p)=(\gamma\cdot p-m)C(p),\tag{6.26}$$

其中,$C(p)$在 $\gamma\cdot p=m$ 时为一小量,则

$$iS_f^0(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m-A-B(\gamma\cdot p-m)-C(\gamma\cdot p-m)},\tag{6.27}$$

其中的常数 A 与 B,如(6.19)与(6.20)式所示,在 $M^2\Rightarrow\infty$时是对数发散的.

为了消除这两个发散项,人们认为(6.27)式中的 m 不是物理上测量到的费米子质量,而是所谓的裸质量,并定义重整化质量

$$m_r=m+A,\tag{6.28}$$

且认为这就是实验上测量到的物理质量,这样就消除了发散常数 A,而(6.27)式变为

$$iS_f^0(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m_r-B(\gamma\cdot p-m_r)-C(\gamma\cdot p-m_r)-(B+C)A}.$$

由于在 M 取极限前,A、B 与 C 都是小量,所以略去上式分母中的二阶小量 $(B+C)A$,上式变为

$$\begin{aligned}iS_f^0(p)&=\frac{i}{(\gamma\cdot p-m_r)(1-B-C)}\\&\xlongequal{BC\text{为二阶小量}}\frac{i}{(\gamma\cdot p-m_r)(1-B-C+BC)},\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}iS_f^0(p)&=\frac{i}{(\gamma\cdot p-m_r)(1-B)(1-C)}\\&\simeq(1+B)\frac{i}{\gamma\cdot p-m_r-\Sigma_f(p)}.\end{aligned}$$

令

$$Z_2=1+B,\tag{6.29}$$

则在链近似下的费米子传播子可以写成

$$iS_f^0(p)=Z_2iS_f^r(p),\quad iS_f^r(p)=\frac{i}{\gamma\cdot p-m_r-\Sigma_f(p)}.\tag{6.30}$$

在 $M^2\Rightarrow\infty$的极限情况下,$S_f^r(p)$是有限的,叫做重整化传播子;$S_f^0(p)$是发散的,称

为裸传播子；二者由发散常数 $Z_2=1+B$ 相联系，通常将其称为费米子场重整化常数. 由于(6.30)式中的 Z_2 与 $S^r_f(p)$是相乘关系，所以通常称这种重整化为相乘重整化，而称形如(6.28)式的重整化为相加重整化，因为该式中的重整化质量与重整化常数 A 是相加关系.

$S^0_f(p)$与 $S^r_f(p)$是动量空间的传播子，其傅里叶变换，即坐标空间中的裸与重整化的传播子为

$$\begin{aligned} \mathrm{i}S^0_f(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{i}S^0_f(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}, \\ \mathrm{i}S^r_f(x-y) &= \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \mathrm{i}S^r_f(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot(x-y)}. \end{aligned} \tag{6.31}$$

它们之间有关系

$$\mathrm{i}S^0_f(x-y)=Z_2\mathrm{i}S^r_f(x-y). \tag{6.32}$$

按照传播子的定义

$$\begin{aligned} \mathrm{i}S^0_f(x-y) &= \langle 0|T\psi^0(x)\bar{\psi}^0(y)|0\rangle, \\ \mathrm{i}S^r_f(x-y) &= \langle 0|T\psi^r(x)\bar{\psi}^r(y)|0\rangle, \end{aligned} \tag{6.33}$$

由此可推出费米子裸场量与重整化场量之间有关系

$$\psi^0(x)=\sqrt{Z_2}\,\psi^r(x),\quad \bar{\psi}^0(x)=\sqrt{Z_2}\,\bar{\psi}^r(x). \tag{6.34}$$

这正是 Z_2 被称为费米子场重整化常数的原因.

时空波函数 $\psi(x)$、$\bar{\psi}(x)$的傅里叶变换是动量空间的旋量波函数 $u(p,s)$、$\bar{u}(p,s)$，因此裸场量 $u^0(p,s)$、$\bar{u}^0(p,s)$与重整化场量 $u^r(p,s)$、$\bar{u}^r(p,s)$之间，也应有如(6.34)式所示的关系，即

$$u^0(p,s)=\sqrt{Z_2}\,u^r(p,s),\quad \bar{u}^0(p,s)=\sqrt{Z_2}\,\bar{u}^r(p,s), \tag{6.35}$$

二者是(6.34)式在动量空间中的表示.

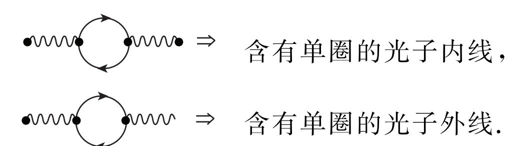
6.2 真空极化

如前面 4.4 节所述，真空极化是指光子变成费米子对，费米子对又随即湮灭为光子的过程. 与费米子一样，光子也分虚光子和实光子，分别以内线与外线的形式出现在费曼图中. 在最低级近似下，它们分别是

•∿∿∿•　⇒　光子内线或光子传播子，

•∿∿∿　⇒　光子外线.

考虑到高阶近似时，就会出现圈图，如



当然还有更高阶的多圈图,它们统称为真空极化图.

6.2.1　真空极化部分

真空极化部分是指截掉光子内线或外线的外腿后剩下的闭合费米子圈,如图 6.4所示.

相应的 S 矩阵元是

$$\mathrm{i}e^2\pi_{\mu\nu}(k)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k)-m+\mathrm{i}\varepsilon},\tag{6.36}$$

亦即

$$\pi_{\mu\nu}(k)=\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{Tr}\gamma_\mu(\gamma\cdot p+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+m]}{(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}.\tag{6.37}$$

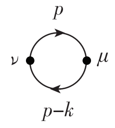


图 6.4　真空极化部分

按照 γ 矩阵的求迹定理 Ⅰ 与 Ⅱ,即(1.54)与(1.55)式,被积函数中的分子

$$\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma_\mu=\underline{\mathrm{Tr}[\gamma\cdot p\gamma_\nu\gamma\cdot(p-k)\gamma_\mu}+m^2\gamma_\nu\gamma_\mu],$$

其中的下划线项 $=\mathrm{Tr}(\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\mu)p^\alpha(p-k)^\beta$

$$=4(g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}-g_{\alpha\beta}g_{\nu\mu}+g_{\alpha\mu}g_{\nu\beta})p^\alpha(p-k)^\beta$$

$$=4[p_\nu(p-k)_\mu+p_\mu(p-k)_\nu-p\cdot(p-k)g_{\mu\nu}],$$

这样

$$\mathrm{Tr}(\gamma\cdot p+m)\gamma_\nu[\gamma\cdot(p-k)+m]\gamma_\mu=4[2p_\mu p_\nu-k_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)].$$

将其代入(6.37)式得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=4\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{2p_\mu p_\nu-k_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]}.\tag{6.38}$$

6.2.2　分母的积化和

(6.38)式被积函数中的分母是两因子的乘积,如前所述,为了便于积分,需将其化成因子和的形式,这种化法可以通过 6.1 节介绍过的(6.4)式来实现,也可以改用其他方法,这里采用公式

$$\frac{1}{AB}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{[Ax+B(1-x)]^2}\tag{6.39}$$

来实现这一点.令

$$A=(p-k)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon,\quad B=p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon,$$

则

$$\begin{aligned}Ax+B(1-x)&=(p^2-2p\cdot k+k^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)x+(p^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-x)\\&=p^2-2p\cdot kx-m^2+k^2x+\mathrm{i}\varepsilon.\end{aligned}$$

将其代入(6.38)式得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=4\mathrm{i}\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\int_0^1\mathrm{d}x\,\frac{2p_\mu p_\nu-k_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{[p^2-2p\cdot kx-(m^2-k^2x)+\mathrm{i}\varepsilon]^2}.\quad(6.40)$$

这种形式的积分,在量子场论的圈图计算中经常遇到,它的特点是:分母是 $p^2-2p\cdot k_x-\Delta$ 的 α 次方,分子是 1、p_μ、$p_\mu p_\nu$ 的形式,其中 p 是积分变量,k_x、Δ 与 p 无关. 记

$$\begin{aligned}F^\alpha(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^4p\,\frac{1}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha},\\F^\alpha_\mu(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^4p\,\frac{p_\mu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha},\\F^\alpha_{\mu\nu}(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^4p\,\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}.\end{aligned}\quad(6.41)$$

通常称这类积分为费曼积分,而(6.40)是(6.41)式的线性组合,其中 $k_x=kx$,$\Delta=m^2-k^2x$,$\alpha=2$.

6.2.3　特荷夫-威特曼的维数正规化法

(6.41)式是四维动量空间的积分,它们的分子分别$\propto p^4$、p^5、p^6,分母$\propto p^{2\alpha}$. 这样,若 $\alpha\leqslant 2$,在 $p\Rightarrow\infty$ 的极限情况下,它们是发散的. 如当 $\alpha=2$ 时,它们分别以对数、线性与平分的形式趋于发散,(6.40)式就属于这种情况. 发散积分是没有意义的,需采用正规化法将其分离出来,以便将其重整化为有意义的有限量. 人们曾设计出多种正规化法,6.1 节采用的是泡利-维勒斯正规子正规化法,这里将采用另一种正规化法——特荷夫-威特曼(t'Hooft - Veltman)维数正规化法.

注意到(6.41)式的发散与动量空间的维数直接相关. 动量空间是四维的,它们就有如上所述的发散问题,假若动量空间不是四维,而是 n 维的,通过适当地选取 n,如 $n<4$,发散问题就可能被消除掉. 由后面的讨论可以看出,实际情况确实如此. 维数正规化就是把费曼积分(6.41)作为 n 维有限积分在 $n\Rightarrow 4$ 时的极限. 为此令

$$\begin{aligned}F^\alpha(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^np\,\frac{1}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha},\\F^\alpha_\mu(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^np\,\frac{p_\mu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha},\\F^\alpha_{\mu\nu}(k,\Delta)&=\int\mathrm{d}^np\,\frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}.\end{aligned}\quad(6.42)$$

而(6.41)是(6.42)式在 $n=4$ 时的极限.

(6.42)式的三个积分是相互关联的，有关系

$$F_{\mu}^{\alpha}(k,\Delta)=\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_{x}^{\mu}}F^{\alpha-1}(k,\Delta),$$
$$F_{\mu\nu}^{\alpha}(k,\Delta)=\frac{1}{2(\alpha-1)}\frac{\partial}{\partial k_{x}^{\nu}}F_{\mu}^{\alpha-1}(k,\Delta). \tag{6.43}$$

由此可见，需要计算的只有 $F^{\alpha}(k,\Delta)$，得到了 $F^{\alpha}(k,\Delta)$ 以后，由(6.43)式就可以得到 $F_{\mu}^{\alpha}(k,\Delta)$ 与 $F_{\mu\nu}^{\alpha}(k,\Delta)$.

作积分变量代换

$$p \Rightarrow l=p-k_{x},$$

(6.42)第 1 式变为

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^{n}l\ \frac{1}{(l^{2}-k_{x}^{2}-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha}}. \tag{6.44}$$

真实的四维空间是闵可夫斯基(Minkowski)空间，其度规张量为

$$g_{\mu\nu}=\mathrm{diag}[1,-1,-1,-1],$$

该空间中的矢量为

$$l^{\mu}=(l^{0},\boldsymbol{l}),\quad l_{\mu}=(l^{0},-\boldsymbol{l}),\quad \boldsymbol{l}=(l_{1},l_{2},l_{3}),\quad l^{0}=l_{0},\quad l^{i}=-l_{i},$$

矢量的模方和标积为

$$l^{2}=l^{\mu}l_{\mu}=l^{02}-\boldsymbol{l}^{2},\quad \boldsymbol{l}^{2}=l_{1}^{2}+l_{2}^{2}+l_{3}^{2},$$
$$l\cdot p=l^{\mu}p_{\mu}=l_{0}p_{0}-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p}=l_{1}p_{1}+l_{2}p_{2}+l_{3}p_{3}.$$

采用维数正规化方法时，空间是 n 维的，其度规张量和矢量也是 n 维的，即

$$g_{ij},\ l_{i},\ i、j=0,1,2,\cdots n-1,$$

且

$$g_{ij}=\mathrm{diag}[\underbrace{1,-1,-1,\cdots,-1}_{n\ 项}],$$
$$l^{i}=(l^{0},\boldsymbol{l}),\quad l_{i}=(l^{0},-\boldsymbol{l}),\quad \boldsymbol{l}=(l_{1},l_{2},\cdots,l_{n-1}).$$

矢量的模方和标积是

$$l^{2}=l^{i}l_{i}=l^{02}-\boldsymbol{l}^{2},\quad \boldsymbol{l}^{2}=l_{1}^{2}+l_{2}^{2}+\cdots+l_{n-1}^{2},$$
$$l\cdot p=l^{i}p_{i}=l_{0}p_{0}-\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p},\quad \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{p}=l_{1}p_{1}+l_{2}p_{2}+\cdots+l_{n-1}p_{n-1}.$$

6.2.4 维克转动

为了求得(6.44)式的积分，现将 n 维闵可夫斯基空间变成 n 维欧几里得(Euclid)空间，这种变换可通过维克转动来实现.

考虑(6.44)式对 l_{0} 的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}l_{0}\ \frac{1}{(l_{0}^{2}-\boldsymbol{l}^{2}-k_{x}^{2}-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha}}.$$

该积分是 l_0 复平面上沿实轴的积分. 被积函数在复平面上有两个奇点

$$l_0 = \pm\left[(\boldsymbol{l}^2 + k_x^2 + \Delta)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{i}\varepsilon\right],$$

如图 6.5 所示. 两奇点分别处在第二、四象限，而在第一、三象限被积函数是解析的，并且在无穷远处，即 $|l_0| \Rightarrow \infty$时，被积函数 $\Rightarrow 0$，所以积分与路径无关. 这样，沿实轴的积分与沿虚轴的积分是相等的，即将积分直线逆时针方向旋转90°后积分结果不变，因此有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l_0 \frac{1}{(l_0^2 - \boldsymbol{l}^2 - k_x^2 - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} = \int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \mathrm{d}l_0 \frac{1}{(l_0^2 - \boldsymbol{l}^2 - k_x^2 - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}.$$

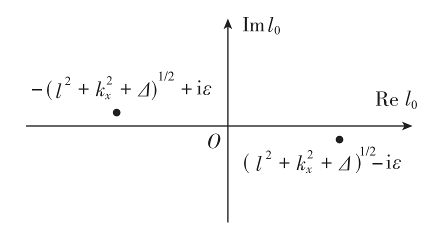


图 6.5　积分复平面 l_0 上的两个积分奇点

积分直线的这种转动就叫做维克转动. 再令

$$l_0 = \mathrm{i}L_0, \quad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{L},$$

则上式变为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}l_0 \frac{1}{(l_0^2 - \boldsymbol{l}^2 - k_x^2 - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} = \mathrm{i}\,(-1)^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}L_0 \frac{1}{(L_0^2 + \boldsymbol{L}^2 + k_x^2 + \Delta - \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}.$$

将其代入(6.44)式得

$$F^\alpha(k, \Delta) = \mathrm{i}\,(-1)^\alpha \int \mathrm{d}^n L \frac{1}{(L^2 + k_x^2 + \Delta - \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}, \tag{6.45}$$

(6.45)式是 n 维欧几里得空间的积分，积分变量为 $L = \sqrt{L_0^2 + \boldsymbol{L}^2}$，是该空间矢量的模，$\mathrm{d}^n L$ 为体积元，采用球坐标系

$$\mathrm{d}^n L = L^{n-1}\mathrm{d}L\mathrm{d}\Omega_n, \tag{6.46}$$

L 是径向坐标，变化范围是$[0, \infty]$，$\mathrm{d}\Omega_n$是立体角元

$$\mathrm{d}\Omega_n = (\sin\theta_{n-1})^{n-2}\mathrm{d}\theta_{n-1}(\sin\theta_{n-2})^{n-3}\mathrm{d}\theta_{n-2}\cdots\sin\theta_2\mathrm{d}\theta_2\mathrm{d}\theta_1,$$

$$0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta_2,\ \cdots,\ \theta_{n-2},\ \theta_{n-1} \leqslant \pi.$$

由于(6.45)式中的被积函数与角度无关，可先将 $\mathrm{d}\Omega_n$积分掉. 为此利用公式

$$\int_0^\pi \sin^m\theta\mathrm{d}\theta = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma[(m+2)/2]},$$

其中 Γ 函数满足关系

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t, \ \Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!,$$

$$\Gamma(1) = 1, \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \ \cdots.$$

利用上述关系,得

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}\Omega_n &= \int_0^\pi (\sin\theta_{n-1})^{n-2} \mathrm{d}\theta_{n-1} \int_0^\pi (\sin\theta_{n-2})^{n-3} \mathrm{d}\theta_{n-2} \cdots \int_0^\pi \sin\theta_2 \mathrm{d}\theta_2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_1 \\
&= \pi^{\frac{n-2}{2}} 2\pi \frac{\Gamma[(n-2+1)/2]}{\Gamma[(n-2+2)/2]} \frac{\Gamma[(n-3+1)/2]}{\Gamma[(n-3+2)/2]} \cdots \frac{\Gamma[(1+1)/2]}{\Gamma[(1+2)/2]} \\
&= \pi^{\frac{n-2}{2}} 2\pi \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)},
\end{aligned}$$

则积分(6.45)变为

$$F^\alpha(k,\Delta) = \mathrm{i}\,(-1)^\alpha \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty \frac{L^{n-1} \mathrm{d}L}{(L^2 + k_x^2 + \Delta - \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}. \tag{6.47}$$

另外,积分

$$\int_0^\infty \frac{L^{n-1} \mathrm{d}L}{(L^2 + k_x^2 + \Delta - \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n/2)\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - n/2}},$$

这样(6.47)式变为

$$F^\alpha(k,\Delta) = \int \mathrm{d}^n p \frac{1}{(p^2 - 2p \cdot k_x - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} = \mathrm{i}\,(-1)^\alpha \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - n/2}}. \tag{6.48}$$

而

$$F^{\alpha-1}(k,\Delta) = \mathrm{i}\,(-1)^{\alpha-1} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha - 1)} \frac{1}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - 1 - n/2}},$$

则由(6.43)式得

$$\begin{aligned}
F_\mu^\alpha(k,\Delta) &= \int \mathrm{d}^n p \frac{p_\mu}{(p^2 - 2p \cdot k_x - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^\alpha} = \frac{1}{2(\alpha - 1)} \frac{\partial}{\partial k_x^\mu} F^{\alpha-1}(k,\Delta) \\
&= \mathrm{i}\,(-1)^{\alpha-1} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha - 1)} \frac{n/2 - \alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{k_{x\mu}}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - n/2}} \\
&= \mathrm{i}\,(-1)^\alpha \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{k_{x\mu}}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - n/2}}.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

又

$$F_\mu^{\alpha-1}(k,\Delta) = \mathrm{i}\,(-1)^{\alpha-1} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\alpha - 1 - n/2)}{\Gamma(\alpha - 1)} \frac{k_{x\mu}}{(\Delta + k_x^2)^{\alpha - 1 - n/2}},$$

则由(6.43)式得

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^n p\ \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^\alpha}=\frac{1}{2(\alpha-1)}\ \frac{\partial}{\partial k_x^\nu}F^{\alpha-1}_{\mu}(k,\Delta)$$

$$=\mathrm{i}\,(-1)^{\alpha-1}\pi^{n/2}\left[\frac{\Gamma(\alpha-1-n/2)(n/2-\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-1)(\alpha-1)}\ \frac{k_{x\mu}k_{x\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-n/2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\Gamma(\alpha-1-n/2)}{\Gamma(\alpha-1)}\ \frac{1}{2(\alpha-1)}\ \frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-1-n/2}}\right]$$

$$=\mathrm{i}\,(-1)^{\alpha}\pi^{n/2}\left[\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{k_{x\mu}k_{x\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-n/2}}-\frac{\Gamma(\alpha-1-n/2)}{2\Gamma(\alpha)}\ \frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{\alpha-1-n/2}}\right]. \tag{6.50}$$

6.2.5　真空极化部分的正规化

前面得到了如(6.40)式所示的真空极化部分的 S 矩阵元,将其动量的四维积分推广到 n 维情况得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=4\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^4}\ \frac{2p_\mu p_\nu-k_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{[p^2-2p\cdot kx-(m^2-k^2x)+\mathrm{i}\varepsilon]^2}$$

$$=4\mathrm{i}\int_0^1 \mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^4}\ \frac{2p_\mu p_\nu-k_\mu p_\nu-p_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}(p^2-p\cdot k-m^2)}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2},$$

其中

$$k_x=kx,\quad \Delta=m^2-k^2x \tag{6.51}$$

与积分变量 p 无关.将(6.48)～(6.50)代入上式得

$$\int \mathrm{d}^n p\ \frac{2p_\mu p_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2}$$

$$=\mathrm{i}\pi^{n/2}\left[\Gamma(2-n/2)\ \frac{2k_\mu k_\nu x^2}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}-\Gamma(1-n/2)\ \frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_x^2)^{1-n/2}}\right]. \tag{6.52}$$

$$\int \mathrm{d}^n p\ \frac{k_\mu p_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2}=\mathrm{i}\pi^{n/2}\Gamma(2-n/2)\frac{k_\mu k_\nu x}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}, \tag{6.53}$$

$$\int \mathrm{d}^n p\ \frac{p_\mu k_\nu}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2}=\mathrm{i}\pi^{n/2}\Gamma(2-n/2)\frac{k_\mu k_\nu x}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}, \tag{6.54}$$

$$\int \mathrm{d}^n p\ \frac{p^2}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2}=\int \mathrm{d}^n p\ \frac{p_\beta p^\beta}{(p^2-2p\cdot k_x-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^2}$$

$$\overset{(6.50)\text{式}}{=\!=\!=}\mathrm{i}\pi^{n/2}\left[\Gamma(2-n/2)\ \frac{k_\beta k^\beta x^2}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}-\frac{\Gamma(1-n/2)}{2}\ \frac{g^\beta_\beta}{(\Delta+k_x^2)^{1-n/2}}\right]$$

$$=\mathrm{i}\pi^{n/2}\left[\Gamma(2-n/2)\frac{k^2x^2}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}-\Gamma(1-n/2)\ \frac{2}{(\Delta+k_x^2)^{1-n/2}}\right], \tag{6.55}$$

$$\int \mathrm{d}^n p \, \frac{p \cdot k}{(p^2 - 2p \cdot k_x - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^2} = \int \mathrm{d}^n p \, \frac{p_\beta k^\beta}{(p^2 - 2p \cdot k_x - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^2}$$

$$\xlongequal{(6.49)\text{式}} \mathrm{i}\pi^{n/2} \Gamma(2 - n/2) \frac{k^2 x}{(\Delta + k_x^2)^{2-n/2}}, \quad (6.56)$$

$$\int \mathrm{d}^n p \, \frac{m^2}{(p^2 - 2p \cdot k_x - \Delta + \mathrm{i}\varepsilon)^2} \xlongequal{(6.48)\text{式}} \mathrm{i}\pi^{n/2} \Gamma(2 - n/2) \frac{m^2}{(\Delta + k_x^2)^{2-n/2}}. \quad (6.57)$$

这样

$$\pi_{\mu\nu}(k) = \frac{\mathrm{i}}{4\pi^4} \int_0^1 \mathrm{d}x \mathrm{i}\pi^{n/2}$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma(2-n/2)}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}} [2k_\mu k_\nu x^2 - 2k_\mu k_\nu x - g_{\mu\nu}(k^2 x^2 - k^2 x - m^2)] \right.$$

$$\left. + \underline{g_{\mu\nu} \frac{\Gamma(1-n/2)}{(\Delta+k_x^2)^{1-n/2}}} \right\},$$

其中的下划线项 $= g_{\mu\nu} \dfrac{\Gamma(2-n/2)(\Delta+k_x^2)}{(1-n/2)(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}}$,

则

$$\pi_{\mu\nu}(k) \xlongequal{n=4} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\Gamma(2-n/2)}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}} \bigg|_{n \Rightarrow 4} \{2k_\mu k_\nu (1-x)x - g_{\mu\nu}[k^2(1-x)x + m^2 - (\Delta + k_x^2)]\}$$

$$\xlongequal{(6.51)\text{式}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{\Gamma(2-n/2)}{(\Delta+k_x^2)^{2-n/2}} \bigg|_{n \Rightarrow 4} [2k_\mu k_\nu (1-x)x - 2g_{\mu\nu} k^2 (1-x)x],$$

亦即

$$\pi_{\mu\nu}(k) = \frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu} k^2) \int_0^1 \mathrm{d}x (1-x)x \, \frac{\Gamma(2-n/2)}{(m^2 - k^2 x + k^2 x^2)^{2-n/2}} \bigg|_{n \Rightarrow 4}. \quad (6.58)$$

在(6.58)式中,当 $n \Rightarrow 4$ 时,由于 $\Gamma(2-n/2) \Rightarrow \Gamma(0) \Rightarrow \infty$,结果是发散的.这样,我们将真空极化部分的发散矩阵元表示成了有限积分的极限,这是正规化过程的第一步,接下来,就是要将发散部分和有限部分分离开来.

考虑到

$$\Gamma(2-n/2) = \frac{\Gamma(3-n/2)}{2-n/2} \xlongequal{n \Rightarrow 4} \frac{1}{2-n/2} \xrightarrow{n \Rightarrow 4} \infty.$$

又

$$\frac{1}{(m^2 - k^2 x + k^2 x^2)^{2-n/2}} = \exp\left[-\left(2 - \frac{n}{2}\right)\ln(m^2 - k^2 x + k^2 x^2)\right]$$

$$\simeq 1 - \left(2 - \frac{n}{2}\right)\ln(m^2 - k^2 x + k^2 x^2),$$

这样

$$\left.\frac{\Gamma(2-n/2)}{(m^2-k^2x+k^2x^2)^{2-n/2}}\right|_{n\Rightarrow 4}=\frac{1}{2-n/2}-\ln(m^2-k^2x+k^2x^2).$$

令

$$\frac{1}{2-n/2}=\ln M^2,$$

且当 $n\Rightarrow 4$ 时，$M^2\Rightarrow\infty$，则

$$\left.\frac{\Gamma(2-n/2)}{(m^2-k^2x+k^2x^2)^{2-n/2}}\right|_{n\Rightarrow 4}=\ln\frac{M^2}{m^2}-\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}(1-x)x\right].\tag{6.59}$$

将它们代入(6.58)式得

$$\pi_{\mu\nu}(k)=\frac{1}{2\pi^2}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)x\left\{\ln\frac{M^2}{m^2}-\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}(1-x)x\right]\right\}.\tag{6.60}$$

该式亦可改写成

$$\begin{aligned}&\pi_{\mu\nu}(k)=(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2)\pi(k^2),\\&\pi(k^2)=\pi_0+\pi_e(k^2).\end{aligned}\tag{6.61}$$

其中

$$\pi_0=\frac{1}{2\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)x=\frac{1}{12\pi^2}\ln\frac{M^2}{m^2},\tag{6.62}$$

在 $n\Rightarrow 4$ 时，$M^2\Rightarrow\infty$，所以 π_0 是发散的.

$$\pi_e(k^2)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^1\mathrm{d}x(1-x)x\ln\left[1-\frac{k^2}{m^2}(1-x)x\right]\simeq\frac{k^2}{60\pi^2m^2},\tag{6.63}$$

与 n 无关，且 $k^2\ll m^2$，在 $n\Rightarrow 4$ 时是有限的. 这样，真空极化部分的发散部分与有限部分被分离了开来，从而完成了正规化，剩下的事就是要将发散部分消除掉，也就是重整化，以使所得的结果有意义.

6.2.6　光子场的重整化常数

真空极化部分 $\mathrm{i}e^2\pi_{\mu\nu}(k)$，出现在光子的内线与外线中，下面以链近似下的光子传播子为例，来讨论它的重整化问题. 图 6.6 是链近似下的光子传播子的费曼图，与其相应的 S 矩阵元为

$$\begin{aligned}\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)&=\mathrm{i}D_{\mu\nu}(k)+\mathrm{i}D_{\mu\sigma}(k)\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\mathrm{i}D_{\rho\nu}(k)\\&\quad+\mathrm{i}D_{\mu\sigma}(k)\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\mathrm{i}D_{\rho\alpha}(k)\mathrm{i}e^2\pi^{\alpha\beta}(k)\mathrm{i}D_{\beta\nu}(k)+\cdots\\&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\alpha}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\alpha\beta}(k)\frac{-\mathrm{i}g_{\beta\nu}}{k^2}+\cdots\\&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\left[\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\rho\alpha}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\alpha\beta}(k)\frac{-\mathrm{i}g_{\beta\nu}}{k^2}+\cdots\right]\\&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi^{\sigma\rho}(k)\mathrm{i}D^0_{\rho\nu}(k).\end{aligned}\tag{6.64}$$

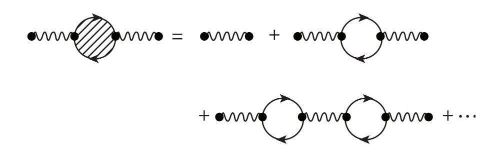


图 6.6　链近似下的光子传播子

将(6.61)式中的 $\pi^{\sigma\rho}(k)$ 代入上式得

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2(k^\sigma k^\rho-g^{\sigma\rho}k^2)\pi(k^2)\mathrm{i}D^0_{\rho\nu}(k). \tag{6.65}$$

从张量分析的角度来看，$D^0_{\mu\nu}(k)$应是由 $g_{\mu\nu}$、$k_\mu k_\nu$ 构成的二阶张量，其一般形式可写成

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=A(k^2)g_{\mu\nu}+B(k^2)k_\mu k_\nu, \tag{6.66}$$

其中，A 与 B 为两任意标量函数，为了确定它们，将(6.66)代入(6.65)式，得

$$\begin{aligned}Ag_{\mu\nu}+Bk_\mu k_\nu&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2(k^\sigma k^\rho-g^{\sigma\rho}k^2)\pi(k^2)(Ag_{\rho\nu}+Bk_\rho k_\nu)\\&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\sigma}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi(k^2)A(k^\sigma k_\nu-g^\sigma_\nu k^2)\\&=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2}+\frac{e^2\pi(k^2)A}{k^2}(k_\mu k_\nu-g_{\mu\nu}k^2),\end{aligned}$$

亦即

$$g_{\mu\nu}\left[A+e^2\pi(k^2)A+\frac{\mathrm{i}}{k^2}\right]+k_\mu k_\nu\left[B-\frac{e^2\pi(k^2)}{k^2}A\right]=0. \tag{6.67}$$

由于 $g_{\mu\nu}$、$k_\mu k_\nu$ 是两个独立的二阶张量，(6.67)式要求

$$A=\frac{-\mathrm{i}}{k^2[1+e^2\pi(k^2)]},\quad B=\frac{-\mathrm{i}e^2\pi(k^2)}{k^4[1+e^2\pi(k^2)]}, \tag{6.68}$$

这样(6.66)式变为

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2[1+e^2\pi(k^2)]}+\frac{-\mathrm{i}e^2\pi(k^2)k_\mu k_\nu}{k^4[1+e^2\pi(k^2)]}. \tag{6.69}$$

注意到光子传播子的两端总是与两条箭头方向相反的费米子线相连，所以在有传播子存在的地方总会伴有费米子流的出现，而流守恒要求$\partial_\mu j^\mu\Rightarrow k_\mu j^\mu=0$，因此上式中的第二项实际上是不起作用的. 这样，在链近似下，有效的光子传播子为

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2[1+e^2\pi(k^2)]}. \tag{6.70}$$

由于 $e^2/4\pi=\alpha\simeq1/137$ 是一小量，所以在取极限 $n\Rightarrow4$ 或 $M^2\Rightarrow\infty$前，$e^2\pi_0$ 或 $e^2\pi_e(k^2)$都是小量. 故有

$$1+e^2\pi(k^2)=1+e^2\pi_0+e^2\pi_e(k^2)=[1+e^2\pi_0][1+e^2\pi_e(k^2)],$$

这样(6.70)式可以写成

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2[1+e^2\pi_0][1+e^2\pi_e(k^2)]}.$$

令

$$Z_3=\frac{1}{1+e^2\pi_0}\simeq 1-e^2\pi_0\,, \tag{6.71}$$

则链近似下的光子传播子变为

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)=Z_3\mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(k)\,,\quad \mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2\left[1+e^2\pi_e(k^2)\right]}. \tag{6.72}$$

表明光子传播子是相乘重整化的，在 $n\Rightarrow 4$ 的极限情况下，$D^r_{\mu\nu}(k)$是有限的，称为重整化的光子传播子；$D^0_{\mu\nu}(k)$是发散的，称为裸光子传播子；Z_3 是发散常数，称为光子场重整化常数.

上述传播子是动量空间中的传播子，由傅里叶变换，可得坐标空间中的裸与重整化的传播子

$$\begin{aligned}\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(x-y)&=\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}\,,\\ \mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(x-y)&=\int \mathrm{d}^4k\,\mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot(x-y)}.\end{aligned} \tag{6.73}$$

二者有关系

$$\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(x-y)=Z_3\mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(x-y). \tag{6.74}$$

另外，按照传播子的定义

$$\begin{aligned}\mathrm{i}D^0_{\mu\nu}(x-y)&=\langle 0|TA^0_\mu(x)A^0_\nu(y)|0\rangle,\\ \mathrm{i}D^r_{\mu\nu}(x-y)&=\langle 0|TA^r_\mu(x)A^r_\nu(y)|0\rangle.\end{aligned} \tag{6.75}$$

因此光子的裸场量 $A^0_\mu(x)$与重整化场量 $A^r_\mu(x)$之间有关系

$$A^0_\mu(x)=\sqrt{Z_3}\,A^r_\mu(x)\,, \tag{6.76}$$

这就是将 Z_3 称为光子场重整化常数的原因.

$A_\mu(x)$的傅里叶变换是动量、极化空间的极化矢量 $e_\mu(k,\lambda)$. 因此，裸矢量 $e^0_\mu(k,\lambda)$与重整化矢量 $e^r_\mu(k,\lambda)$之间亦有关系

$$e^0_\mu(k,\lambda)=\sqrt{Z_3}\,e^r_\mu(k,\lambda)\,, \tag{6.77}$$

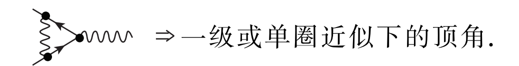
该式是(6.76)式在动量、极化空间中的表示.

6.3　顶角因子

费曼图的基本构件有三：内线、外线与顶角. 对于旋量场的电磁作用，顶角由两条费米子线与一条光子线组成. 最低级近似下的顶角为

⇒最低级或树图近似下的顶角.

高一阶的顶角是


⇒一级或单圈近似下的顶角.

当然还有更高阶的多圈图顶角,统称为顶角因子.

6.3.1 顶角部分

在一级或单圈近似下的顶角中,截去外腿后的剩余部分叫做顶角部分,如图 6.7 所示.以$-\mathrm{i}e\Lambda_\mu(p,p')$表示该部分的 S 矩阵元,则由费曼规则知

图 6.7　顶角部分

$$-\mathrm{i}e\Lambda_\mu(p,p')=\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p'-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}$$
$$\times(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\lambda),\tag{6.78a}$$

亦即

$$\Lambda_\mu(p,p')=-\mathrm{i}e^2\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{\gamma_\nu[\gamma\cdot(p'-l)+m]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-l)+m]\gamma^\nu}{(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]},\tag{6.78b}$$

积分最后要求 $\eta\Rightarrow 0$.

利用 γ 矩阵的夹积定理,即(1.57)式,(6.78b)式中的分子可写成

$$\begin{aligned}N&=\gamma_\nu[\gamma\cdot(p'-l)+m]\gamma_\mu[\gamma\cdot(p-l)+m]\gamma^\nu\\&=\gamma_\nu[\gamma\cdot(p'-l)\gamma_\mu\gamma\cdot(p-l)+m\gamma\cdot(p'-l)\gamma_\mu+m\gamma_\mu\gamma\cdot(p-l)+m^2\gamma_\mu]\gamma^\nu\\&=-2\gamma\cdot(p-l)\gamma_\mu\gamma\cdot(p'-l)+4m(p'-l)_\mu+4m(p-l)_\mu-2m^2\gamma_\mu\\&=-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-\underline{2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot l}\\&\quad+4m(p'+p-2l)_\mu-2m^2\gamma_\mu,\end{aligned}$$

下划线项$=2\gamma_\alpha l^\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta l^\beta=2\gamma_\alpha\gamma_\mu\gamma_\beta l^\alpha l^\beta=2\gamma_\alpha(2g_{\mu\beta}-\gamma_\beta\gamma_\mu)l^\alpha l^\beta$
$=4\gamma\cdot ll_\mu-2(\gamma\cdot l)^2\gamma_\mu=4\gamma\cdot ll_\mu-2l^2\gamma_\mu$,

则

$$N=2l^2\gamma_\mu-4\gamma\cdot ll_\mu+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-8ml_\mu$$
$$-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'+4m(p'+p)_\mu-2m^2\gamma_\mu.\tag{6.79}$$

它们是被积变量 l 的二次方、一次方与零次方项.这样,(6.78)式中的分子$\propto l^6$,分母$\propto l^6$,当 $l\Rightarrow\infty$时,该积分是对数发散的,需要正规化.

6.3.2 正规化的费曼截割法

前两节我们曾分别采用过泡利-威勒斯的正规子正规化法和特荷夫-威特曼的维数正规化法.这里,将采用另一种正规化方法,称为费曼截割法.该方法和泡利-威勒斯的正规子方法相类似,区别在于它不是将费米子取做正规子,而是将玻色子取做正

规子,即作代换

$$\frac{1}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}-\frac{1}{l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon} = \frac{\eta^2-M^2}{(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)},$$

将其代入(6.78)式得

$$\Lambda_\mu(p,p') = -\mathrm{i}e^2\int \frac{\mathrm{d}^4 l}{(2\pi)^4} \times \frac{(\eta^2-M^2)N}{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)}, \tag{6.80}$$

其中的 N 由(6.79)式给出. 当 M 取有限值时,由于上式中的分子$\propto l^6$,分母$\propto l^8$,积分是有限的,当 $M^2 \Rightarrow \infty$时,它又回到了发散积分(6.78b)式,所以(6.78b)式是有限积分(6.80)式的极限,从而完成了正规化的第一步,接下来就是要将极限情况下的发散部分与有限部分分离开来.

6.3.3　分母的积化和

(6.80)式中的分母是四个因子的乘积,与前面一样,为了方便积分,需将其变写成因子和的形式. 在 6.1 与 6.2 节,曾分别采用(6.4)与(6.39)式来做到这一点,这里将利用公式

$$\frac{1}{A^m B^n} = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{[Ax+B(1-x)]^{m+n}} \tag{6.81}$$

来处理该问题. 首先

$$\frac{1}{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}^2},$$

再

$$\frac{1}{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}^2(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)} = \int_0^1 \frac{2y\mathrm{d}y}{\{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}^3},$$

最后

$$\frac{1}{\{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}^3(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)} = \int_0^1 \frac{3z^2\mathrm{d}z}{\{\{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}z},$$

$$+(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-z)\}^4$$

这样

$$\frac{1}{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon][(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)}$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x2y\mathrm{d}y3z^2\mathrm{d}z}{\{\{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}z+(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-z)\}^4},$$
$$(6.82)$$

将其代入(6.80)式得

$$\Lambda_\mu(p',p)=-\mathrm{i}e^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 2y\mathrm{d}y\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{(\eta^2-M^2)N}{D^4},\tag{6.83}$$

其中

$$\begin{aligned}D&=\{\{[(p'-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon]x+[(p-l)^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon](1-x)\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}z\\&\quad+(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-z)\\&=\{\{l^2-2l\cdot[p'x+p(1-x)]-m^2+p'^2x+p^2(1-x)+\mathrm{i}\varepsilon\}y+(l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-y)\}z\\&\quad+(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-z)\\&=\{l^2-2l\cdot[p'x+p(1-x)]y-m^2y+p'^2xy+p^2(1-x)y-\eta^2(1-y)+\mathrm{i}\varepsilon\}z\\&\quad+(l^2-M^2+\mathrm{i}\varepsilon)(1-z)\\&=l^2-2l\cdot[p'xyz+p(1-x)yz]-m^2yz+p'^2xyz+p^2(1-x)yz-\eta^2(1-y)z\\&\quad-M^2(1-z)+\mathrm{i}\varepsilon,\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}&k_z=p'xyz+p(1-x)yz,\\&\Delta=m^2yz-p'^2xyz-p^2(1-x)yz+\eta^2(1-y)z+M^2(1-z),\end{aligned}\tag{6.84}$$

二者与积分变量 l 无关,则

$$D=l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon,\tag{6.85}$$

将其代入(6.83)式得

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu(p,p')=&-\mathrm{i}e^2(\eta^2-M^2)\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 2y\mathrm{d}y\int_0^1 3z^2\mathrm{d}z\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\\&\times\frac{2\gamma_\mu l^2-4\gamma\cdot ll_\mu+2\gamma\cdot l\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot l-8ml_\mu+Q_\mu}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^4},\end{aligned}\tag{6.86}$$

其中

$$Q_\mu=4m\,(p'+p)_\mu-2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot p'-2m^2\gamma_\mu,\tag{6.87}$$

与积分变量 l 无关.

6.3.4　顶角部分的正规化

在(6.86)式中,对 l 的积分是有限的.由前面的(6.48)～(6.50)三式知

$$F^{\alpha}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^n l\ \frac{1}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha}}=\mathrm{i}\ (-1)^{\alpha}\pi^{n/2}\ \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{1}{(\Delta+k_z^2)^{\alpha-n/2}},$$

$$F_{\mu}^{\alpha}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^n l\ \frac{l_{\mu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha}}=\mathrm{i}\ (-1)^{\alpha}\pi^{n/2}\ \frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\ \frac{k_{z\mu}}{(\Delta+k_z^2)^{\alpha-n/2}},$$

$$F_{\mu\nu}^{\alpha}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^n l\ \frac{l_{\mu}l_{\nu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{\alpha}}$$

$$=\mathrm{i}\ (-1)^{\alpha}\pi^{n/2}\left[\frac{\Gamma(\alpha-n/2)}{\Gamma(\alpha)}\frac{k_{z\mu}k_{z\nu}}{(\Delta+k_z^2)^{\alpha-n/2}}-\frac{\Gamma(\alpha-1-n/2)}{2\Gamma(\alpha)}\frac{g_{\mu\nu}}{(\Delta+k_z^2)^{\alpha-1-n/2}}\right].$$

在以上三式中取 $\alpha=4,n=4$ 得

$$F^{4}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^4 l\ \frac{1}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{4}}=\mathrm{i}\pi^2\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{(\Delta+k_z^2)^{2}},$$

$$F_{\mu}^{4}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^4 l\ \frac{l_{\mu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{4}}=\mathrm{i}\pi^2\ \frac{1}{6}\ \frac{k_{z\mu}}{(\Delta+k_z^2)^{2}},$$

$$F_{\mu\nu}^{4}(k,\Delta)=\int \mathrm{d}^4 l\ \frac{l_{\mu}l_{\nu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{4}}=\mathrm{i}\pi^2\left[\frac{1}{6}\ \frac{k_{z\mu}k_{z\nu}}{(\Delta+k_z^2)^{2}}-\frac{1}{12}\ \frac{g_{\mu\nu}}{\Delta+k_z^2}\right].$$

这样

$$\int \mathrm{d}^4 l\ \frac{2\gamma_{\mu}l^2-4\gamma\cdot l l_{\mu}+2\gamma\cdot l\gamma_{\mu}\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_{\mu}\gamma\cdot l-8ml_{\mu}+Q_{\mu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{4}}$$

$$=\int \mathrm{d}^4 l\ \frac{2\gamma_{\mu}l^{\nu}l_{\nu}-4\gamma^{\nu}l_{\mu}l_{\nu}+2\gamma^{\nu}\gamma_{\mu}\gamma\cdot p'l_{\nu}+2\gamma\cdot p\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}l_{\nu}-8mg_{\mu}^{\nu}l_{\nu}+Q_{\mu}}{(l^2-2l\cdot k_z-\Delta+\mathrm{i}\varepsilon)^{4}}$$

$$=\mathrm{i}\pi^2\left[\frac{1}{6}\frac{2\gamma_{\mu}k_z^2-4\gamma^{\nu}k_{z\mu}k_{z\nu}}{(\Delta+k_z^2)^2}-\frac{1}{12}\frac{8\gamma_{\mu}-4\gamma_{\mu}}{\Delta+k_z^2}\right]$$

$$+\mathrm{i}\pi^2\ \frac{1}{6}\frac{k_{z\nu}}{(\Delta+k_z^2)^2}(2\gamma^{\nu}\gamma_{\mu}\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_{\mu}\gamma^{\nu}-8mg_{\mu}^{\nu})+\mathrm{i}\pi^2\ \frac{1}{6}\frac{Q_{\mu}}{(\Delta+k_z^2)^2}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\pi^2}{6\,(\Delta+k_z^2)^2}(2\gamma_{\mu}k_z^2-4\gamma\cdot k_z k_{z\mu}+2\gamma\cdot k_z\gamma_{\mu}\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_{\mu}\gamma\cdot k_z-8mk_{z\mu}+Q_{\mu})$$

$$-\frac{i\pi^2\gamma_{\mu}}{3(\Delta+k_z^2)},\tag{6.88}$$

将其代入(6.86)式得

$$\Lambda_{\mu}(p,p')=\frac{e^2(\eta^2-M^2)}{16\pi^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z$$

$$\times\left[\frac{2\gamma_{\mu}k_z^2-4\gamma\cdot k_z k_{z\mu}+2\gamma\cdot k_z\gamma_{\mu}\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_{\mu}\gamma\cdot k_z-8mk_{z\mu}+Q_{\mu}}{(\Delta+k_z^2)^2}-\frac{2\gamma_{\mu}}{\Delta+k_z^2}\right].\tag{6.89}$$

按定义(6.84)式,被积函数的分母

$$\Delta+k_z^2=m^2yz-p'^2xyz-p^2(1-x)yz+\eta^2(1-y)z+M^2(1-z)$$

$$+[p'xyz+p(1-x)yz]^2,$$

由于 $M^2\gg m^2$、η^2、p^2 与 p'^2,则

$$\Delta+k_z^2 \simeq (1-z)M^2+m^2y-p'^2xy-p^2(1-x)y+\eta^2(1-y)+[p'xy+p(1-x)y]^2$$
$$=(1-z)M^2+m^2y-p'^2xy(1-y)-p^2(1-x)y(1-y)+\eta^2(1-y)$$
$$-(p'-p)^2x(1-x)y^2.$$

记

$$\Delta+k_z^2=(1-z)M^2+A, \tag{6.90}$$

其中

$$A=m^2y-p'^2xy(1-y)-p^2(1-x)y(1-y)+\eta^2(1-y)-(p'-p)^2x(1-x)y^2. \tag{6.91}$$

不含有 z. 将(6.90)代入(6.89)式,计算对 z 的积分. 第一项为

$$I_1=(\eta^2-M^2)\int_0^1 \mathrm{d}zz^2\,\frac{2\gamma_\mu k_z^2-4\gamma\cdot k_zk_{z\mu}+2\gamma\cdot k_z\gamma_\mu\gamma\cdot p'+2\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k_z-8mk_{z\mu}+Q_\mu}{[(1-z)M^2+A]^2}.$$

按定义(6.84)式,上式中的

$$k_z=p'xyz+p(1-x)yz.$$

作代换 $1-z\Rightarrow z$,则

$$I_1=(\eta^2-M^2)\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{(1-z)^2}{(zM^2+A)^2}$$
$$\times[2(1-z)^2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(1-z)(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu]$$
$$=(\eta^2-M^2)\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{zM^2+A}\right)\frac{(1-z)^2}{-M^2}$$
$$\times[2(1-z)^2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(1-z)(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu],$$

其中

$$k=p'xy+p(1-x)y. \tag{6.92}$$

注意到 $\eta\Rightarrow 0, M\Rightarrow\infty$,所以

$$I_1=\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{zM^2+A}\right)(1-z)^2$$
$$\times[2(1-z)^2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(1-z)(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu],$$

完成分部积分得

$$I_1=\frac{(1-z)^2}{zM^2+A}[2(1-z)^2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(1-z)(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu]\Big|_0^1$$
$$-\int_0^1\mathrm{d}z\,\frac{1}{zM^2+A}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\underline{\{(1-z)^2[2(1-z)^2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)}$$
$$\underline{+2(1-z)(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu]\}},$$

其中的下划线部分$\propto z^n$ $(n=0,1,2,3)$,由于 M^2 很大,积分$\Rightarrow 0$. 所以

$$I_1=-\frac{2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu}{A}. \tag{6.93}$$

(6.89)式第二项的 z 积分为

$$I_2 = -2\gamma_\mu(\eta^2 - M^2)\int_0^1 \mathrm{d}z \frac{z^2}{(1-z)M^2+A} \xlongequal{1-z\Rightarrow z} -2\gamma_\mu(\eta^2-M^2)\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{(1-z)^2}{zM^2+A},$$

考虑到 $\eta \Rightarrow 0, M\Rightarrow\infty$,则

$$\begin{aligned} I_2 &= 2\gamma_\mu\int_0^1 \frac{1-2z+z^2}{z+A/M^2}\mathrm{d}z \simeq 2\gamma_\mu\int_0^1\left(\frac{1}{z+A/M^2}-2+z\right)\mathrm{d}z \\ &= 2\gamma_\mu\left[\ln\left(z+\frac{A}{M^2}\right)\Big|_0^1 - 2+\frac{1}{2}\right] \simeq 2\gamma_\mu\left(\ln\frac{M^2}{A}-\frac{3}{2}\right). \end{aligned} \tag{6.94}$$

将(6.93)与(6.94)代入(6.89)式得

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(p,p') = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\Big[2\gamma_\mu\left(\ln\frac{M^2}{A}-\frac{3}{2}\right) \\ -\frac{2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu}{A}\Big]. \end{aligned} \tag{6.95}$$

为了将(6.95)式中含有 M^2 的项分离出来,令

$$L = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y 2(\ln M^2 - \ln m^2),$$

或

$$L = \frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}. \tag{6.96}$$

剩下的是含 η 的项,用 $\Lambda_{c\mu}(p,p')$ 表示,则

$$\begin{aligned} \Lambda_{c\mu}(p,p') = \frac{\alpha}{4\pi}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y\Big[2\gamma_\mu\left(\ln\frac{m^2}{A}-\frac{3}{2}\right) \\ -\frac{2(\gamma_\mu k^2-2\gamma\cdot kk_\mu)+2(\gamma\cdot k\gamma_\mu\gamma\cdot p'+\gamma\cdot p\gamma_\mu\gamma\cdot k-4mk_\mu)+Q_\mu}{A}\Big]. \end{aligned} \tag{6.97}$$

其中,Q_μ、A 与 k 分别由(6.87)、(6.91)与(6.92)式给定,后两者都是 x 与 y 的函数. 显然,(6.97)式的积分是很烦难的,在 $|p-p'|^2 \ll m^2$ 时,它近似为

$$\Lambda_{c\mu}(p,p') \simeq \gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right) - \frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p-p'),\gamma_\mu], \tag{6.98}$$

可见在 $\eta\Rightarrow 0$ 时,$\Lambda_{c\mu}(p,p')$ 是发散的. 所以 $\Lambda_{c\mu}(p,p')$ 虽然与 M 无关不存在紫外发散,但却由于与 $\ln\eta$ 成比例而存在红外发散. 由于本书范围所限,红外发散的消除问题这里就不再做讨论了.

综上所述,得到单圈近似下的顶角部分

$$\Lambda_\mu(p,p') = L\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p'), \tag{6.99}$$

其中,L 与 $\Lambda_{c\mu}(p,p')$ 分别由(6.96)与(6.98)式给出.

6.3.5 顶角重整化常数

近似到单圈近似时的顶角为

p'　　p'

$$+ \quad \Rightarrow -\mathrm{i}e\gamma_\mu - \mathrm{i}e\Lambda_\mu(p,p'),$$

p　　p

所以代替树图近似下顶角因子 γ_μ 的应为

$$\Gamma^0_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,p'). \tag{6.100}$$

如(6.96)与(6.98)式所示，L 与 $\Lambda_{c\mu}$ 都与 α 成正比，在 M^2 与 η 都取有限值时，二者都是小于 1 的量，因此

$$\gamma_\mu + \Lambda_\mu(p,p') = \gamma_\mu + L\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p') = (1+L)[\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p')],$$

亦即

$$\Gamma^0_\mu(p,p') = (1+L)[\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p')].$$

令

$$Z_1 = \frac{1}{1+L} \simeq 1 - L, \tag{6.101}$$

则

$$\Gamma^0_\mu(p,p') = \frac{1}{Z_1}\Gamma^r_\mu(p,p'), \quad \Gamma^r_\mu(p,p') = \gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p'), \tag{6.102}$$

其中，Z_1 在 $M^2 \Rightarrow \infty$ 的极限情况下是发散的，叫做顶角重整化常数；$\Gamma^r_\mu(p,p')$ 是有限的，叫做重整化顶角.

6.4 电荷重整化与瓦德等式

如前面所述，在旋量场的电磁作用中，有三个基本单圈图，如图 6.8 所示. 各圈图的 S 矩阵元分别为

$$\begin{aligned}
&\Sigma(p) = A + B(\gamma\cdot p - m) + \Sigma_f(p), \\
&A = \frac{3m\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \quad B = -\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \quad \Sigma_f(p) \sim (\gamma\cdot p - m)^2.
\end{aligned} \tag{6.103}$$

$$\begin{aligned}
&\pi_{\mu\nu}(k) = (k_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}k^2)[\pi_0 + \pi_e(k^2)], \\
&e^2\pi_0 = \frac{\alpha}{3\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \quad e^2\pi_e(k^2) = \frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m^2}.
\end{aligned} \tag{6.104}$$

$$\begin{aligned}
&\Lambda_\mu(p,p') = L\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}(p,p'), \\
&L = \frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}, \\
&\Lambda_{c\mu}(p,p') = \gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta} - \frac{3}{8}\right) - \frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p-p'), \gamma_\mu].
\end{aligned} \tag{6.105}$$

其中的 A、B、$e^2\pi_0$ 与 L 是四个发散常数，它们都正比于精细结构常数 $\alpha\simeq 1/137$，所以当 M^2 取物理上有限的质量值时，都是小于 1 的量，当 $M^2\Rightarrow\infty$ 时，它们都是对数发散的.

$-\mathrm{i}\Sigma(p)$　　$\mathrm{i}e^2\pi_{\mu\nu}(k)$　　$-\mathrm{i}e\Lambda_\mu(p,p')$

图 6.8　旋量场电磁作用的三个基本单圈图

四个发散常数中，A 通过质量重整化

$$m_r=m+\delta m,\quad \delta m=A, \tag{6.106}$$

被吸收掉，其他三个发散常数 B、$e^2\pi_0$ 与 L 以三个重整化常数的形式

$$Z_1=\frac{1}{1+L}\simeq 1-L,\quad Z_2=1+B,\quad Z_3=\frac{1}{1+e^2\pi_0}\simeq 1-e^2\pi_0, \tag{6.107}$$

出现在顶角、内线及外线中

$$\begin{aligned}
&\Gamma_\mu^0(p,p')=Z_1^{-1}\Gamma_\mu^r(p,p'),\quad \Gamma_\mu^r(p,p')=\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p'),\\
&\mathrm{i}S_f^0(p)=Z_2\mathrm{i}S_f^r(p),\quad \mathrm{i}S_f^r(p)=\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m_r-\Sigma_f(p)},\quad \psi^0(x)=\sqrt{Z_2}\,\psi^r(x),\\
&\mathrm{i}D_{\mu\nu}^0(k)=Z_3\mathrm{i}D_{\mu\nu}^r(k),\quad \mathrm{i}D_{\mu\nu}^r(k)=\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\nu}}{k^2[1+e^2\pi_e(k^2)]},\quad A_\mu^0(x)=\sqrt{Z_3}\,A_\mu^r(x),
\end{aligned} \tag{6.108}$$

成为顶角、内线及外线的发散因子，对于具体的物理过程，需要通过重整化将它们消除掉，以使所得结果有限.

由于粒子的质量需按(6.106)式重整化，所以在拉格朗日密度中，费米子的质量项为

$$-m\bar{\psi}\psi=-(m_r-\delta m)\bar{\psi}\psi,$$

表明，若用重整化质量 m_r 代替裸质量 m，在拉格朗日密度中就多了一项 $\delta m\bar{\psi}\psi$. 换句话说，若把 $-m_r\bar{\psi}\psi$ 看成质量项，拉格朗日密度就多了一附加项 $\Delta\mathcal{L}_i\Rightarrow\delta m\bar{\psi}\psi$，相互作用的哈密顿密度函数就多了一附加项 $\Delta\mathcal{H}_i\Rightarrow-\delta m\bar{\psi}\psi$. 这样，在费曼图中就多了一个与两根费米子线相连的顶角

$$\longrightarrow\!\!\times\!\!\longrightarrow\ \Rightarrow \mathrm{i}\delta m.$$

这样，在按照费曼规则计算 S 矩阵元、用重整化质量 m_r 代替裸质量 m 时，就需要考虑这一附加顶角.

6.4.1　电荷重整化

为了消除三个重整化常数 Z_1、Z_2 与 Z_3，下面来考虑电荷重整化. 为此我们考虑一种具体的物理过程——电子的电磁辐射. 在该过程中，一个电子辐射一个光子变成

另一电子,像高能正负电子对撞机上的同步辐射就属于这种情况.在单圈近似下,该过程的费曼图如图 6.9 所示,与之相应的 S 矩阵元是

$$S^0_{fi}=\overline{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\{\underset{(1)}{\gamma_\mu}-\underset{(2)}{\mathrm{i}\Sigma(p')\mathrm{i}S_f(p')\gamma_\mu}+\underset{(3)}{\mathrm{i}\delta m\mathrm{i}S_f(p')\gamma_\mu}+\underset{(4)}{\gamma_\mu\mathrm{i}S_f(p)[-\mathrm{i}\Sigma(p)]}$$

$$+\underset{(5)}{\gamma_\mu\mathrm{i}S_f(p)\mathrm{i}\delta m}+\underset{(6)}{\Lambda_\mu(p',p)}+\underset{(7)}{\gamma_\nu\mathrm{i}D^{\nu\lambda}(k)\mathrm{i}e^2\pi_{\lambda\mu}(k)}\}u(p,s)\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}$$

$$=\overline{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\Big\{\gamma_\mu-\mathrm{i}[A+B(\gamma\cdot p'-m)+\Sigma_f(p')]\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu$$

$$+\mathrm{i}\delta m\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}(-\mathrm{i})[A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p)]$$

$$+\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}\mathrm{i}\delta m+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')$$

$$+\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{k^2}\mathrm{i}e^2(k_\lambda k_\mu-g_{\lambda\mu}k^2)[\pi_0+\pi_e(k^2)]\Big\}u(p,s)\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}.$$

上式中的场量 $\overline{u}(p',s')$、$u(p,s)$ 与 $e^\mu(k,\lambda)$,都出自于一段固定另一端自由的简单外线,所以它们都是有意义或重整化的量.

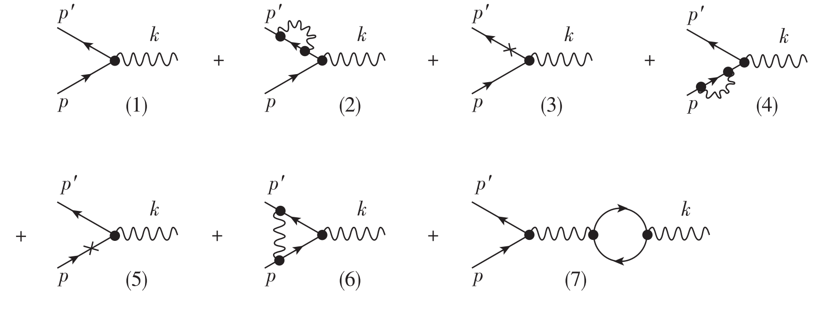


图 6.9 一电子辐射一光子变成另一电子的费曼图

由(6.103)与(6.106)式知

$$A=\delta m,\quad \Sigma_f(p)u(p,s)\sim(\gamma\cdot p-m)^2u(p,s)=0,\quad \overline{u}(p',s')(\gamma\cdot p'-m)=0,\tag{6.109}$$

再由光子的波动方程(1.102b)与洛伦兹条件(1.115)知

$$k^2e^\mu(k,\lambda)=0,\quad k^\mu e_\mu(k,\lambda)=0,\tag{6.110}$$

并注意到(6.104)式中的 $e^2\pi_e(k^2)\propto k^2$,则

$$S^0_{fi}=\overline{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\Big[\gamma_\mu+B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}B$$

$$+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')-\gamma_\mu e^2\frac{k^2}{k^2}\pi_0\Big]u(p,s)\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}.\tag{6.111}$$

又由能量-动量守恒知

$$p-p'=k,$$

则(6.105)式中的

$$\Lambda_{c\mu}(p,p') \Rightarrow \Lambda_{c\mu}(k)=\gamma_\mu \frac{\alpha}{3\pi}\frac{k^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right)-\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot k,\ \gamma_\mu],$$

将其代入(6.111)式,利用(6.110)式并忽略其第二项小量,得

$$S_{fi}^0=\overline{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\left\{\gamma_\mu+B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}B\right.$$
$$\left.+L\gamma_\mu-\gamma_\mu e^2\frac{k^2}{k^2}\pi_0\right\}u(p,s)\frac{e^\mu(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}. \tag{6.112}$$

(6.112)式有三个不定式

$$\overline{u}(p',s')B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}=\begin{cases}0,\\ B\overline{u}(p',s').\end{cases}$$

$$\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}Bu(p,s)=\begin{cases}0,\\ Bu(p,s).\end{cases}$$

$$\frac{k^2}{k^2}\pi_0 e^\mu(k,\lambda)=\begin{cases}0,\\ \pi_0 e^\mu(k,\lambda).\end{cases}$$

为了确定它们,考虑场量的重整化.由(6.35)与(6.77)式知

$$\begin{aligned}u^0&=\sqrt{Z_2}\,u=\sqrt{1+B}u=\left(1+\frac{1}{2}B\right)u,\\ e_\mu^0&=\sqrt{z_3}\,e_\mu=\sqrt{1-e^2\pi_0}\,e_\mu=\left(1-\frac{1}{2}e^2\pi_0\right)e_\mu.\end{aligned} \tag{6.113}$$

这里,与(6.112)式一样,等式右边代表重整化的场量角标“r”没有标出来.考虑到单圈近似下外线的修正,由图 6.9 知

$$\begin{aligned}\overline{u}^0(p',s')&=\overline{u}(p',s')[1-\mathrm{i}\Sigma(p')\mathrm{i}S_f(p')+\mathrm{i}\delta m\mathrm{i}S_f(p')]\\ &=\overline{u}(p',s')\left\{1-\mathrm{i}[A+B(\gamma\cdot p'-m)+\Sigma_f(p')]\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}+\mathrm{i}\delta m\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}\right\}.\end{aligned}$$

利用(6.109)式

$$\overline{u}^0(p',s')=\overline{u}(p',s')\left(1+B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}\right). \tag{6.114}$$

又由图 6.9 知

$$\begin{aligned}u^0(p,s)&=\{1+\mathrm{i}S_f(p)[-\mathrm{i}\Sigma(p)]+\mathrm{i}S_f(p)\mathrm{i}\delta m\}u(p,s)\\ &=\left\{1+\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}(-\mathrm{i})[A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p)]\right.\\ &\quad\left.+\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}\mathrm{i}\delta m\right\}u(p,s).\end{aligned}$$

再利用(6.109)式

$$u^0(p,s)=\left(1+\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}B\right)u(p,s). \tag{6.115}$$

另由图 6.9 知,单圈近似下的光子外线为

$$e^{\nu 0}(k,\lambda)=e^{\nu}(k,\lambda)+\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{k^2}\mathrm{i}e^2\pi_{\lambda\mu}(k)e^{\mu}(k,\lambda)$$

$$=e^{\nu}(k,\lambda)+\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{k^2}\mathrm{i}e^2(k_\lambda k_\mu-g_{\lambda\mu}k^2)[\pi_0+\pi_e(k^2)]e^{\mu}(k,\lambda).$$

注意到 $e^2\pi_e(k^2)\propto k^2$，并利用(6.110)式

$$e^{\nu 0}(k,\lambda)=e^{\nu}(k,\lambda)\left(1-e^2\frac{k^2}{k^2}\pi_0\right). \tag{6.116}$$

将(6.113)与(6.114)～(6.116)三式相比较知

$$\begin{aligned}&\bar{u}(p',s')B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}=\bar{u}(p',s')\frac{B}{2},\\&\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}Bu(p,s)=\frac{B}{2}u(p,s),\\&\frac{k^2}{k^2}\pi_0e^{\mu}(k,\lambda)=\frac{\pi_0}{2}e^{\mu}(k,\lambda).\end{aligned} \tag{6.117}$$

这样，(6.112)式变为

$$S_{fi}^0=\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\gamma_\mu\left(1+B+L-\frac{e^2}{2}\pi_0\right)u(p,s)\frac{e^{\mu}(k,\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}, \tag{6.118}$$

当 M^2 取有限值时，B、L 与 π_0 都是小于 1 的量，则

$$1+B+L-\frac{e^2}{2}\pi_0=(1+B)(1+L)\left(1-\frac{e^2}{2}\pi_0\right)=Z_2Z_1^{-1}\sqrt{Z_3}, \tag{6.119}$$

(6.119)式最后一步用到了 Z_1、Z_2 与 Z_3 的(6.107)定义式. 这样，(6.118)式变为

$$S_{fi}^0=\bar{u}(p',s')\left(-\mathrm{i}eZ_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\right)\gamma_\mu u(p,s)\frac{e^{\mu}(p-p',\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}.$$

为了消除上式中的发散常数，人们认为，上式中的电荷 e 是一裸电荷，其值是发散的，而实验上测得的电荷应为

$$e_r=Z_1^{-1}Z_2\sqrt{Z_3}\,e, \tag{6.120}$$

称为重整化电荷，其值是有限的. 则

$$S_{fi}^r=\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e_r\gamma_\mu)u(p,s)\frac{e^{\mu}(p-p',\lambda)}{\sqrt{2V\omega}}. \tag{6.121}$$

这样，通过电荷重整化，就一次性地消除了三个发散的重整化常数 Z_1、Z_2 与 Z_3，S 矩阵元全由重整化或有限的量表示了出来，从而使其变得不再发散，完成了旋量场电磁辐射这种实际的物理过程的重整化.

6.4.2　电荷普适性

由(6.103)与(6.105)两式知

$$L=\frac{\alpha}{4\pi}\ln\frac{M^2}{m^2}=-B, \tag{6.122}$$

又

$$Z_2=1+B,\ Z_1=1-L,\ \Rightarrow Z_1=Z_2, \tag{6.123}$$

由此可见,三个重整化常数中只有两个是独立的.这样,重整化电荷(6.120)式变为

$$e_r=\sqrt{z_3}\,e, \tag{6.124}$$

表明顶角部分的重整化效应与费米子自能部分的重整化效应相互抵消.电荷的重整化只与光子场的重整化常数 $\sqrt{z_3}$ 有关,而与费米子场的重整化常数 Z_2 无关.裸电荷 e 相同的粒子,它们的重整化电荷也相同.各粒子的电荷,不会因重整化效应而引起它们之间的差异,这个性质叫做电荷普适性.

6.4.3　瓦德等式

由(6.1)与(6.78)式知,在单圈近似下,费米子的自能和顶角部分分别为

$$\Sigma(p)=-\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{1}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\lambda),$$

$$\Lambda_\mu(p,p')=\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p'-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\lambda),$$

将 $\Sigma(p)$ 对 p^μ 求导得

$$\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu}=-\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\lambda),$$

与 $\Lambda_\mu(p,p')$ 比较得

$$\Lambda_\mu(p,p)=-\frac{\partial\Sigma(p)}{\partial p^\mu}, \tag{6.125}$$

这是瓦德(Ward)在 1950 年发现的公式,称为瓦德等式.

6.5　量子辐射修正

与图 6.8 所示的三个基本单圈图相应的 S 矩阵元(6.103)～(6.105)式,除了四个发散常数 A、B、$e^2\pi_0$ 与 L 外,还有三个有限量

$$\begin{aligned}&\Sigma_f(p)\sim(\gamma\cdot p-m)^2,\\&e^2\pi_e(k^2)=\frac{\alpha}{15\pi}\frac{k^2}{m^2},\\&\Lambda_{c\mu}(p,p')=\gamma_\mu\frac{\alpha}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}\right)-\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot(p-p'),\ \gamma_\mu].\end{aligned} \tag{6.126}$$

它们将对物理过程产生影响,称为量子辐射修正效应,这可由实验测定.

6.5.1　外场中的电子

为了得到辐射修正效应,考察在给定外场中的电子.

在 5.3 节中,曾讨论过这个问题.不过,那里只涉及电子和经典场的作用,没有考虑量子电磁场的影响,从而忽略了辐射修正效应.现在考虑量子场的单圆贡献,其费曼图如图 6.10 所示,与之相应的 S 矩阵元为

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{e0}=&\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\{\underset{(1)}{\gamma_\mu}-\underset{(2)}{\mathrm{i}\Sigma(p')\mathrm{i}S_f(p')\gamma_\mu}+\underset{(3)}{\mathrm{i}\delta m\,\mathrm{i}S_f(p')\gamma_\mu}+\underset{(4)}{\gamma_\mu \mathrm{i}S_f(p)[-\mathrm{i}\,\Sigma(p)]}\\
&+\underset{(5)}{\gamma_\mu \mathrm{i}S_f(p)\mathrm{i}\delta m}+\underset{(6)}{\Lambda_\mu(p,p')}+\underset{(7)}{\gamma_\nu \mathrm{i}D^{\nu\lambda}(k)\mathrm{i}e^2\pi_{\lambda\mu}(k)}\}u(p,s)A_e^\mu(p,p'). \qquad (6.127)
\end{aligned}
$$

将各因子代入上式得

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{e0}=\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\Big\{&\gamma_\mu-\mathrm{i}[A+B(\gamma\cdot p'-m)+\Sigma_f(p')]\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu\\
&+\mathrm{i}\delta m\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu+\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}(-\mathrm{i})[A+B(\gamma\cdot p-m)+\Sigma_f(p)]\\
&+\gamma_\mu\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m}\mathrm{i}\delta m+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')\\
&+\gamma_\nu\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{k^2}\mathrm{i}e^2(k_\lambda k_\mu-g_{\lambda\mu}k^2)[\pi_0+\pi_e(k^2)]\Big\}u(p,s)A_e^\mu(p-p').
\end{aligned}
$$

图 6.10　单圈近似下电子与经典场的作用

利用(6.109)式与洛伦兹条件

$$
k_\mu A_e^\mu(p-p')\big|_{k=p-p'}=0,
$$

得

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{e0}=\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)\Big\{&\gamma_\mu+B\frac{\gamma\cdot p'-m}{\gamma\cdot p'-m}\gamma_\mu\\
&+\gamma_\mu\frac{\gamma\cdot p-m}{\gamma\cdot p-m}B+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')-\gamma_\mu e^2[\pi_0+\pi_e(k^2)]\Big\}u(p,s)A_e^\mu(p-p').
\end{aligned}
$$

再利用(6.117)式

$$
\begin{aligned}
S_{fi}^{e0}=\bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e)[&\gamma_\mu+B\gamma_\mu+L\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')\\
&-e^2\pi_0\gamma_\mu-e^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu]u(p,s)A_e^\mu(p-p'). \qquad (6.128)
\end{aligned}
$$

由于在 $M^2\Rightarrow\infty$ 前，B、L 与 $e^2\pi_0$ 都是小于 1 的量，故(6.128)式中括号内的项可以写成

$$
\begin{aligned}
&\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')-e^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu+B\gamma_\mu+L\gamma_\mu-e^2\pi_0\gamma_\mu\\
&=[\gamma_\mu+\Lambda_{c\mu}(p,p')-e^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu](1+B)(1+L)(1-e^2\pi_0)\\
&=\{\gamma_\mu+[\Lambda_{c\mu}(p,p')-e^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu](1-e^2\pi_0)\}(1+B)(1+L)(1-e^2\pi_0)\\
&=\{\gamma_\mu+[\Lambda_{c\mu}(p,p')-e^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu]Z_3\}Z_2Z_1^{-1}Z_3,
\end{aligned}
$$

其中的重整化常数如(6.107)式所示. 由(6.105)式知，$\Lambda_{c\mu}(p,p')\propto e^2$，而 $A_e^\mu(p-p')$

$\propto e$,所以考虑到电荷重整化

$$e_r = Z_2 Z_1^{-1}\sqrt{Z_3}\,e = \sqrt{Z_3}\,e,$$

S 矩阵元变为

$$S_{fi}^{er} = \bar{u}(p',s')(-\mathrm{i}e_r)[\gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}^r(p,p') - e_r^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu]u(p,s)A_e^{\mu r}(p-p'), \tag{6.129}$$

其中

$$\begin{aligned} \Lambda_{c\mu}^r(p,p') &= \gamma_\mu \frac{\alpha_r}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta} - \frac{3}{8}\right) - \frac{\alpha_r}{8\pi m}[\gamma\cdot(p-p'),\ \gamma_\mu], \\ e_r^2\pi_e(k^2) &= \frac{\alpha_r}{15\pi}\frac{k^2}{m^2}, \\ \alpha_r &= \frac{e_r^2}{4\pi} = \frac{Z_3 e^2}{4\pi}. \end{aligned} \tag{6.130}$$

是重整化了的顶角部分、真空极化部分与精细结构常数,都是有意义的有限量,

$$A_e^{\mu r}(p-p') = \sqrt{Z_3}\,A_e^\mu(p-p'),$$

是重整化了的外场,也是有限量.因此辐射修正效应在于作代换

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \Rightarrow \Gamma_\mu &= \gamma_\mu + \Lambda_{c\mu}^r(p,p') - e_r^2\pi_e(k^2)\gamma_\mu \\ &= \gamma_\mu + \gamma_\mu\frac{\alpha_r}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta} - \frac{3}{8} - \frac{1}{5}\right) - \frac{\alpha_r}{8\pi m}[\gamma\cdot(p-p'),\ \gamma_\mu]. \end{aligned} \tag{6.131}$$

其中,第 1 项是如 5.3 节所述的树图近似下的顶角因子部分[参见(5.39)与(6.129)式],后两项是重整化了的单圈近似的贡献.由于两者都$\propto\alpha_r$,它们都是小量,是对第 1 项,即树图近似结果的进一步修正.

6.5.2　戈尔登分解

为了能看出上述量子辐射修正各项的意义,先证明戈尔登分解公式

$$\bar{u}(p',s')\gamma_\mu u(p,s) = \bar{u}(p',s')\left[\frac{p_\mu + p'_\mu}{2m} - \frac{\mathrm{i}}{m}S_{\mu\nu}(p^\nu - p'^\nu)\right]u(p,s), \tag{6.132}$$

其中

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu]$$

为由(2.83)式定义的自旋角动量算符.

证明　由狄拉克方程知

$$\bar{u}(p',s')\gamma\cdot p' = m\,\bar{u}(p',s'),\quad \gamma\cdot p\,u(p,s) = m u(p,s), \tag{6.133}$$

则(6.132)式左边

$$\bar{u}(p',s')\gamma_\mu u(p,s) = \frac{1}{2m}\bar{u}(p',s')(\gamma\cdot p'\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma\cdot p)u(p,s). \tag{6.134}$$

由

$$S_{\mu\nu}=\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu}=\frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma_\mu,\ \gamma_\nu],\quad \gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2g_{\mu\nu},$$

得

$$\gamma_\mu\gamma_\nu=g_{\mu\nu}-\mathrm{i}2S_{\mu\nu},$$

则

$$\begin{aligned}\gamma\cdot p'\gamma_\mu+\gamma_\mu\gamma\cdot p&=p'^\nu(g_{\nu\mu}-\mathrm{i}2S_{\nu\mu})+(g_{\mu\nu}-\mathrm{i}2S_{\mu\nu})p^\nu\\&=p_\mu+p'_\mu-\mathrm{i}2S_{\mu\nu}(p^\nu-p'^\nu),\end{aligned}$$

将其代入(6.134)式得

$$\bar{u}(p',s')\gamma_\mu u(p,s)=\bar{u}(p',s')\left[\frac{p_\mu+p'_\mu}{2m}-\frac{\mathrm{i}}{m}S_{\mu\nu}(p^\nu-p'^\nu)\right]u(p,s),$$

证毕.

6.5.3　电子磁矩

在(6.132)式表示的狄拉克流中,右边的第一项为轨道运动的贡献,第二项为自旋运动的贡献.类似于狄拉克场电磁作用的哈密顿密度 $\mathscr{H}_i=-ej_\mu A^\mu$, $j_\mu=\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$[参见(4.132)式],上式第二项与外场作用的哈密顿密度函数为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_i&=e\,\bar{u}(p',s')\frac{\mathrm{i}}{m}S_{\mu\nu}q^\nu u(p,s)A_e^\mu(q)\\&=-\frac{e}{2m}\,\bar{u}(p',s')S_{\mu\nu}u(p,s)[\mathrm{i}q^\mu A_e^\nu(q)-\mathrm{i}q^\nu A_e^\mu(q)],\end{aligned}$$

其中,$q=p-p'$.其空间部分为

$$\mathscr{H}_i\sim-\frac{e}{2m}\,\bar{u}(p',s')S_{ij}u(p,s)[\mathrm{i}q^iA_e^j(q)-\mathrm{i}q^jA_e^i(q)],$$

式中的$\bar{u}(p',s')S_{ij}u(p,s)$是费米子自旋,而中括号内的 $\mathrm{i}q^iA_e^j(q)-\mathrm{i}q^jA_e^i(q)$ 是磁场强度 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ 在动量空间中的表示,所以

$$\mu=-\frac{e}{2m}\tag{6.135}$$

为费米子的磁矩.

(6.135)式是在没有考虑量子电磁场的辐射修正效应时,由狄拉克理论得到的结果,所以人们称其为正常磁矩,(6.131)式第一项就包含了该磁矩.

(6.131)式中的第三项对相互作用哈密顿密度的贡献为

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_i&=e\,\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma\cdot q,\ \gamma_\mu]u(p,s)A_e^\mu(q)\\&=e\,\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{8\pi m}[\gamma_\nu,\ \gamma_\mu]q^\nu u(p,s)A_e^\mu(q)\\&=e\,\bar{u}(p',s')\frac{\alpha}{2\pi m}S_{\mu\nu}\mathrm{i}q^\nu u(p,s)A_e^\mu(q)\\&=-\frac{\alpha}{2\pi}\frac{e}{2m}\bar{u}(p',s')S_{\mu\nu}u(p,s)[\mathrm{i}q^\mu A_e^\nu(q)-\mathrm{i}q^\nu A_e^\mu(q)],\end{aligned}$$

表明由于量子电磁场的辐射修正效应,费米子有附加磁矩

$$\Delta\mu = -\frac{\alpha}{2\pi}\frac{e}{2m} = \frac{\alpha}{2\pi}\mu = 0.001162\mu, \tag{6.136}$$

这与实验测得的

$$\Delta\mu = 0.001160\mu \tag{6.137}$$

高度一致.

6.5.4　能级的兰姆移动

(6.131)式中的第一、二项对相互作用的哈密顿密度的贡献为

$$\mathcal{H}_i = -e\,\bar{u}(p',s')\gamma_\mu\left[1+\frac{\alpha}{3\pi}\frac{(p-p')^2}{m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]u(p,s)A_e^\mu(p-p'). \tag{6.138}$$

在原子核静止的实验室坐标系中,由(5.41)与(5.42)式知

$$A_e^\mu(x) = g^{\mu 0}\frac{Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|},\quad A_e^\mu(p-p') = (2\pi)\delta(E-E')\frac{g^{\mu 0}Ze}{|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'|^2}.$$

将其代入(6.138)式得

$$\mathcal{H}_i = -e\,\bar{u}(p',s')\gamma_\mu\left[A_e^\mu(p-p') - 2\pi\delta(E-E')\frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}g^{\mu 0}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]u(p,s). \tag{6.139}$$

注意到

$$2\pi\delta(E-E') = \int d^4x\,\delta^3(\boldsymbol{x})\,e^{-i(p-p')\cdot x},$$

则上式在坐标空间中的形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_i &= -e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu g^{\mu 0}\left[\frac{1}{4\pi}\frac{Ze}{|\boldsymbol{x}|} - \frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}\delta^3(\boldsymbol{x})\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\right]\psi(x)\\ &= -e\psi^\dagger(x)\left[\frac{Ze}{4\pi|\boldsymbol{x}|} - \frac{Ze\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)\delta^3(\boldsymbol{x})\right]\psi(x),\end{aligned}$$

则相互作用的哈密顿总量为

$$H_{\mathrm{i}} = -\int\frac{Ze^2}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\,|\psi(\boldsymbol{x})|^2 d^3x + \frac{Ze^2\alpha}{3\pi m^2}\left(\ln\frac{m}{\eta}-\frac{3}{8}-\frac{1}{5}\right)|\psi(0)|^2, \tag{6.140}$$

(6.140)式第一项是电子的库仑势能,第二项是由于量子电磁场的辐射修正而引起的能级移动,称为兰姆(Lamb)移动.由于兰姆移动与 η 有关,所以要得到正确的结果,还要消除 η,由于本书范围所限,这里就不再作讨论了.

对于电子的反常磁矩和兰姆移动,量子场论的计算结果和实验的测量值非常精确地相一致.实际上,到目前为止,量子场论的所有计算结果都得到了实验很好的支持,其正确性已得到了广泛的实验验证.

6.6 重整化判据

前面讨论了电磁作用中单圈近似下的重整化问题，我们看到，通过重新定义质量与电荷，正规化出来的发散常数都被吸收掉了，使得计算结果变得有限. 但是，并不是所有的相互作用理论都可重整化，可重整化的理论需要满足一定的条件. 这里，我们将内容稍微展宽一点，就一般作用理论的可重整化条件加以讨论.

6.6.1 表观发散度

在量子场论中，处理某具体过程时，需要先根据该过程画出费曼图，再按照费曼规则写出 S 矩阵元，若费曼图中含有回路，就有发散的回路积分，发散的程度可由它们的表达式加以分析，当然具体情况需由计算结果给出. 如前面讨论过的费米子自能、真空极化与顶角部分，三种情况的 S 矩阵元分别由(6.1)、(6.36)与(6.78)式给出

$$-\mathrm{i}\Sigma(p)=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\mu\nu}}{k^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu),$$

$$\mathrm{i}e^2\pi_{\mu\nu}(k)=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{Tr})(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot p-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-k)-m+\mathrm{i}\varepsilon},$$

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}e\Lambda_\mu(p,p')=&\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}g^{\nu\lambda}}{l^2-\eta^2+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\nu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p'-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}\\&\times(-\mathrm{i}e\gamma_\mu)\frac{\mathrm{i}}{\gamma\cdot(p-l)-m+\mathrm{i}\varepsilon}(-\mathrm{i}e\gamma_\lambda).\end{aligned}$$

上述三式都是四维动量积分，分母的变量分别是三次方、二次方与四次方，因此当积分变量取极限∞时，三积分应分别是线性、平方与对数发散. 但实际的计算结果是：发散常数为

$$A、B、e^2\pi_0\ 与\ L\propto\alpha\ln\left(\frac{M^2}{m^2}\right),$$

即各积分都是对数发散的. 这表明，由积分变量的方次分析得到的发散度只是一些表面、直观的结论，名之曰表观发散度，实际的发散程度应等于或低于表观发散度.

在单圈图中，只有一个回路积分，积分元是四次方. 在一般情况下，若假设费曼图中共含有 L 个独立回路，则 S 矩阵元中将有 L 个独立回路积分，积分元将是 $4L$ 次方. 被积函数由传播子与顶角因子组成. 一个费米子传播子是积分变量的 -1 次方，一个玻色子传播子是积分变量的 -2 次方. 若假设费曼图中共有 I_f 条费米子内线，I_b 条玻色子内线，则被积函数将是积分变量的 $-I_f-2I_b$ 次方. 对于旋量场的电磁作用，相互作用的哈密顿密度函数为 $\mathscr{H}_i=-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$，顶角因子是 $-\mathrm{i}e\gamma_\mu$，与积分变量无关，在一般情况下，若假设费曼图中有 V_α 个 α 型顶角，该类型顶角含有的积分变量是 d_α

次方. 这样,由此定义的 L 个独立回路的表观发散度为

$$D = 4L + \sum_{\alpha} V_{\alpha} d_{\alpha} - I_f - 2I_b, \tag{6.141}$$

当 $D \geqslant 0$ 时,积分是发散的;反之,当 $D < 0$ 时,积分将是收敛的.

6.6.2　图形结构

对于一个具体过程,费曼图的外线数是确定的,即有多少个初态粒子与末态粒子,就有多少条外线,但内线数与顶角数是不确定的,它们不仅和理论有关,还和计算的近似程度有关. 而独立的回路数目、内线数目与顶角数目之间存在着一定的联系.

按上述假设,这里所讨论的费曼图共有 $I = I_f + I_b$ 条内线与 $V = \sum_{\alpha} V_{\alpha}$ 个顶角. 每条内线在 S 矩阵元中将贡献一个四维动量积分,每个顶角将贡献一个保证该顶角能量-动量守恒的 δ 函数 [参见(4.99a)或(4.104a)式]. 这样,S 矩阵元中将包含有 I 个四维动量积分与 V 个 δ 函数,积分掉 $V-1$ 个 δ 函数,剩下一个 δ 函数用于保证整个过程的能量-动量守恒. 而剩下的四维动量积分就是回路积分,所以费曼图中的回路数为

$$L = I - V + 1 = I_f + I_b - \sum_{\alpha} V_{\alpha} + 1. \tag{6.142}$$

对于所讨论的费曼图,假设有 E_f 条费米子外线与 E_b 条玻色子外线,内线与外线都与顶角相连,相连的情况与所采用的理论有关. 设想在一个 α 型顶角上,有 b_{α} 条玻色子线与 f_{α} 条费米子线,那么在 V_{α} 个 α 型顶角上,就有 $V_{\alpha} b_{\alpha}$ 条玻色子线与 $V_{\alpha} f_{\alpha}$ 条费米子线. 而一条外线只与一个顶角相连,一条内线将与两个顶角相连,因此有关系

$$\begin{aligned} E_b + 2I_b &= \sum_{\alpha} V_{\alpha} b_{\alpha}, \\ E_f + 2I_f &= \sum_{\alpha} V_{\alpha} f_{\alpha}. \end{aligned} \tag{6.143}$$

将(6.142)与(6.143)代入(6.141)式得

$$D = \sum_{\alpha} V_{\alpha} \left(\frac{3}{2} f_{\alpha} + b_{\alpha} + d_{\alpha} - 4 \right) - \frac{3}{2} E_f - E_b + 4. \tag{6.144}$$

6.6.3　场量与耦合常数的量纲

由(2.33)式知,自由玻色子哈密顿密度函数的质量项 $\mathcal{H}_b \propto m^2 \phi^2$,由于 $\mathcal{H}_b$ 的量纲为 $[\mathcal{H}_b] = [\mathrm{GeV}^4]$,所以玻色子场量 ϕ 的量纲为 $[\phi] = [\mathrm{GeV}]$. 再由(2.39)式知,自由费米子哈密顿密度函数的质量项 $\mathcal{H}_f \propto m\psi^{\dagger}\psi$,表明费米子场量 ψ 的量纲 $[\psi] = [\mathrm{GeV}^{3/2}]$.

在一个 α 型的顶角上,费米子线的数目 f_{α}、玻色子线的数目 b_{α} 及积分变量的方

次 d_α 都是由相互作用的哈密顿密度函数 $\mathscr{H}_{i\alpha}$ 决定的.这时,$\mathscr{H}_{i\alpha}$ 应是 f_α 个费米子场算符、b_α 个玻色子场算符、积分变量的 d_α 次方及耦合常数 g_α 的乘积.假设耦合常数的量纲为 $[g_\alpha]=[\mathrm{GeV}^{d_{g_\alpha}}]$,则考虑到 $[\mathscr{H}_{i\alpha}]=[\mathrm{GeV}^4]$,得方程

$$4=\frac{3}{2}f_\alpha+b_\alpha+d_\alpha+d_{g_\alpha},$$

由此得耦合常数 g_α 的量纲指数

$$d_{g_\alpha}=4-\frac{3}{2}f_\alpha-b_\alpha-d_\alpha. \tag{6.145}$$

例如,对于旋量场的电磁作用,相互作用的哈密顿密度函数为 $\mathscr{H}_i=-e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu$,这时 $f_\alpha=2,b_\alpha=1,d_\alpha=0$,所以 $d_e=0$,即 e 是无量纲的,这一点在前言部分已讨论过,如(0.21)式所示,在自然单位制中,电荷 e 是一无量纲的常数 $e\simeq 0.3$.

将(6.145)代入(6.144)式得

$$D=-\sum_\alpha V_\alpha d_{g_\alpha}-\frac{3}{2}E_f-E_b+4. \tag{6.146}$$

6.6.4　重整化判据

(6.146)式右边 d_{g_α}、E_f 与 E_b 的前面都是负号,而 V_α、E_f 与 E_b 都是正整数.当 $d_{g_\alpha}\geqslant 0$ 时,$D\geqslant 0$ 的表观发散图形只有有限几种,在这样的理论中,只是包含有有限个发散常数,因此有可能通过重整化方法,把这些有限个发散常数归并于质量与耦合常数项,从而将它们消除掉,使理论变得有意义.所以

$$d_{g_\alpha}\geqslant 0 \tag{6.147}$$

的理论,是可重整化的理论.如前所述,电磁作用耦合常数的量纲指数 $d_{e_\alpha}=0$,所以按此判据,电磁作用是可重整化的,这正是本章前几节重整化工作的基础.(6.147)式亦是我们构造新的相互作用理论的依据之一,因为一个正确的相互作用理论总是可重整化的,其耦合常数的量纲指数应满足(6.147)式.

相反,若 $d_{g_\alpha}<0$,$D\geqslant 0$ 的表观发散图形有无限多种,相应的发散常数也有无穷多个.这样,就不可能将这无限多个发散常数归并于有限个质量与耦合常数,因此不可能用重整化的方法消除掉这无限多个发散常数.由此可见,

$$d_{g_\alpha}<0 \tag{6.148}$$

的理论,是不可重整化的.例如,1934 年费米建立的四费米子直接作用的弱作用理论,其相互作用的哈密顿密度函数包含有四个费米子场算符的乘积,按照(6.145)式,$d_{g_\alpha}=-2<0$.所以,由判据(6.148)式知,该理论是不可重整化的.

索 引

《现代物理基础丛书》已出版书目

（按出版时间排序）

1.现代声学理论基础	马大猷 著	2004.03
2.物理学家用微分几何(第二版)	侯伯元,侯伯宇 著	2004.08
3.数学物理方程及其近似方法	程建春 编著	2004.08
4.计算物理学	马文淦 编著	2005.05
5.相互作用的规范理论(第二版)	戴元本 著	2005.07
6.理论力学	张建树,等 编著	2005.08
7.微分几何入门与广义相对论(上册・第二版)	梁灿彬,周 彬 著	2006.01
8.物理学中的群论(第二版)	马中骐 著	2006.02
9.辐射和光场的量子统计	曹昌祺 著	2006.03
10.实验物理中的概率和统计(第二版)	朱永生 著	2006.04
11.声学理论与工程应用	朱海潮,等 编著	2006.05
12.高等原子分子物理学(第二版)	徐克尊 著	2006.08
13.大气声学(第二版)	杨训仁,陈 宇 著	2007.06
14.输运理论(第二版)	黄祖洽 著	2008.01
15.量子统计力学(第二版)	张先蔚 编著	2008.02
16.凝聚态物理的格林函数理论	王怀玉 著	2008.05
17.激光光散射谱学	张明生 著	2008.05
18.量子非阿贝尔规范场论	曹昌祺 著	2008.07
19.狭义相对论(第二版)	刘 辽,等 编著	2008.07
20.经典黑洞与量子黑洞	王永久 著	2008.08
21.路径积分与量子物理导引	侯伯元,等 著	2008.09
22.量子光学导论	谭维翰 著	2009.01
23.全息干涉计量——原理和方法	熊秉衡,李俊昌 编著	2009.01
24.实验数据多元统计分析	朱永生 编著	2009.02
25.微分几何入门与广义相对论(中册・第二版)	梁灿彬,周 彬 著	2009.03
26.中子引发轻核反应的统计理论	张竞上 著	2009.03
27.工程电磁理论	张善杰 著	2009.08
28.微分几何入门与广义相对论(下册・第二版)	梁灿彬,周 彬 著	2009.08
29.经典电动力学	曹昌祺 著	2009.08
30.经典宇宙和量子宇宙	王永久 著	2010.04
31.高等结构动力学(第二版)	李东旭 著	2010.09
32.粉末衍射法测定晶体结构(第二版・上、下册)	梁敬魁 编著	2011.03

33. 量子计算与量子信息原理	Giuliano Benenti 等 著	
——第一卷:基本概念	王文阁,李保文 译	2011.03
34. 近代晶体学(第二版)	张克从 著	2011.05
35. 引力理论(上、下册)	王永久 著	2011.06
36. 低温等离子体	B. M. 弗尔曼,И. M. 扎什京 编著	
——等离子体的产生、工艺、问题及前景	邱励俭 译	2011.06
37. 量子物理新进展	梁九卿,韦联福 著	2011.08
38. 电磁波理论	葛德彪,魏 兵 著	2011.08
39. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第1卷:基础理论	姬 扬 译	2012.02
40. 激光光谱学	W. 戴姆特瑞德 著	
——第2卷:实验技术	姬 扬 译	2012.03
41. 量子光学导论(第二版)	谭维翰 著	2012.05
42. 中子衍射技术及其应用	姜传海,杨传铮 编著	2012.06
43. 凝聚态、电磁学和引力中的多值场论	H. 克莱纳特 著	
	姜 颖 译	2012.06
44. 反常统计动力学导论	包景东 著	2012.06
45. 实验数据分析(上册)	朱永生 著	2012.06
46. 实验数据分析(下册)	朱永生 著	2012.06
47. 有机固体物理	解士杰,等 著	2012.09
48. 磁性物理	金汉民 著	2013.01
49. 自旋电子学	翟宏如,等 编著	2013.01
50. 同步辐射光源及其应用(上册)	麦振洪,等 著	2013.03
51. 同步辐射光源及其应用(下册)	麦振洪,等 著	2013.03
52. 高等量子力学	汪克林 著	2013.03
53. 量子多体理论与运动模式动力学	王顺金 著	2013.03
54. 薄膜生长(第二版)	吴自勤,等 著	2013.03
55. 物理学中的数学物理方法	王怀玉 著	2013.03
56. 物理学前沿——问题与基础	王顺金 著	2013.06
57. 弯曲时空量子场论与量子宇宙学	刘 辽,黄超光 著	2013.10
58. 经典电动力学	张锡珍,张焕乔 著	2013.10
59. 内应力衍射分析	姜传海,杨传铮 编著	2013.11
60. 宇宙学基本原理	龚云贵 著	2013.11
61. B介子物理学	肖振军 著	2013.11
62. 量子场论与重整化导论	石康杰,等 编著	2014.06
63. 粒子物理导论	杜东生,杨茂志 著	2015.01
64. 固体量子场论	史俊杰,等 著	2015.03

65.物理学中的群论(第三版)——有限群篇	马中骐 著	2015.03
66.中子引发轻核反应的统计理论(第二版)	张竞上 著	2015.03
67.自旋玻璃与消息传递	周海军 著	2015.06
68.粒子物理学导论	肖振军,吕才典 著	2015.07
69.量子系统的辛算法	丁培柱 编著	2015.07
70.原子分子光电离物理及实验	汪正民 著	2015.08
71.量子场论	李灵峰 著	2015.09
72.原子核结构	张锡珍,张焕乔 著	2015.10
73.物理学中的群论(第三版)——李代数篇	马中骐 著	2015.10
74.量子场论导论——电磁作用的阿贝尔规范理论	**姜志进 编著**	**2016.01**

(O−6179.01)

科学数理分社
电话：(010) 64017957
Email：qianjun@mail.sciencep.com

销售分类建议：高等物理

www.sciencep.com



ISBN 978-7-03-046262-6

定 价：98.00 元